

数 学

次のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問について解答せよ。ただし、Ⅰ、Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、解答が分数になる場合は、すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 四面体 ABCD において、 $AB = AC = AD = 7$ 、 $BC = 5$ 、 $CD = 7$ 、

$DB = 8$ とする。頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする。

(1) $\angle CBD$ の大きさは ア であり、 $\triangle BCD$ の面積は イ である。

(2) 線分 BH の長さは ウ である。

(3) 垂線 AH の長さは エ である。四面体 ABCD の体積は オ である。

[2] 3進法で表された数が順に並んでいる数列

$1_{(3)}, 2_{(3)}, 10_{(3)}, 11_{(3)}, 12_{(3)}, 20_{(3)}, 21_{(3)}, 22_{(3)}, 100_{(3)}, 101_{(3)}, 102_{(3)},$
 $110_{(3)}, 111_{(3)}, 112_{(3)}, 120_{(3)}, \dots$

を $\{a_n\}$ とする。また、3進法で表された数の桁数は、例えば、 $12_{(3)}$ の桁数は2桁、 $110_{(3)}$ の桁数は3桁、 $1221_{(3)}$ の桁数は4桁とする。

ここで、3進法で表記されていない数はすべて10進法で表されている。また、 \square ク, \square ケ, \square コ, \square サ は10進法で答えよ。

(1) $\{a_n\}$ において、 $a_{25} = \square$ カ $_{(3)}$, $a_{50} = \square$ キ $_{(3)}$ である。

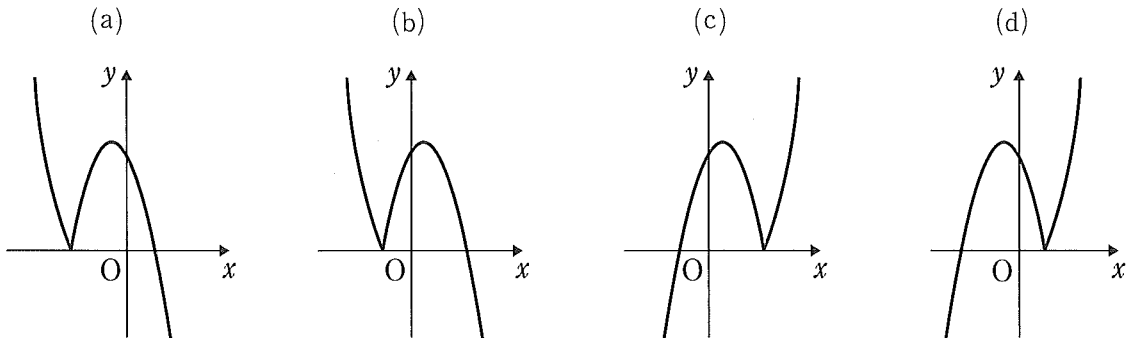
(2) $\{a_n\}$ において、初めて桁数が6桁になるのは、第 \square ク 項である。

(3) k を自然数とする。 $\{a_n\}$ において、桁数が k 桁である項は、 \square ケ 個ある。また、桁数が k 桁である最後の項は、 \square コ である。よって、これら k 桁の数のすべての和を求めると、 \square サ となる。

[3] $t - 1 \leq x \leq t$ における関数 $f(x) = (x + 2) |x - 4|$ の最小値を, $g(t)$ とする。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形として, 最も適当なものは, である。 は, 次の選択肢から1つ選び記号で答えよ。

【選択肢】

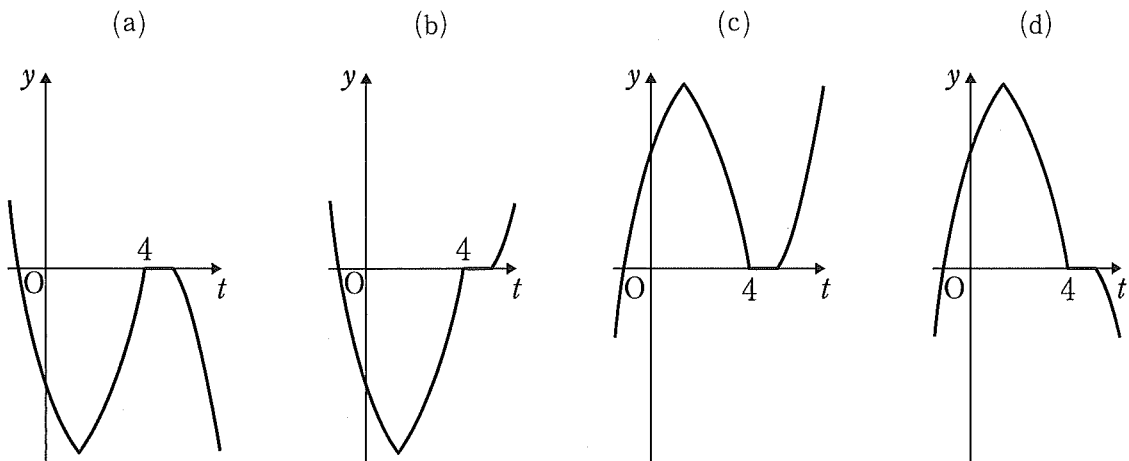


(2) t についての関数 $g(t)$ は, 以下のように $t < \text{ス}$, $t = \text{ス}$, $\text{ス} < t \leq 4$, $4 < t \leq \text{セ}$, $\text{セ} < t$ の5つの場合に分けて表される。

$$g(t) = \begin{cases} f(\text{ソ}) & (t < \text{ス} \text{ のとき}) \\ f(\text{ス} - 1) = f(\text{ス}) & (t = \text{ス} \text{ のとき}) \\ f(\text{タ}) & (\text{ス} < t \leq 4 \text{ のとき}) \\ f(4) & (4 < t \leq \text{セ} \text{ のとき}) \\ f(\text{チ}) & (\text{セ} < t \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) 関数 $y = g(t)$ のグラフの概形として、最も適当なものは、 ツ である。 ツ は、次の選択肢から1つ選び記号で答えよ。

【選択肢】



Ⅱ ある企業がドライフルーツミックスを新商品として販売することを検討している。このドライフルーツミックスは、ドライフルーツ A, B, および C の 3 種類を混ぜて作られる。次の表は、各ドライフルーツの 100 g 当たりの栄養成分 L, 栄養成分 M, 栄養成分 N の含有量および仕入れ価格を示している。ただし、表の中の r は定数とする。

表

ドライフルーツ	栄養成分 L (g/100 g)	栄養成分 M (g/100 g)	栄養成分 N (mg/100 g)	仕入れ価格 (円/100 g)
A	3	4	2.5	r
B	1	8	0.6	100
C	4	10	1.9	120

新商品 100 g に含まれる A, B, C の重さをそれぞれ a g, b g, c g とし、新商品 100 g に対する割合をそれぞれ

$$x = \frac{a}{100}, y = \frac{b}{100}, z = \frac{c}{100}$$

とする。ただし、定数 a, b, c は $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a + b + c = 100$ を満たす。

[1] $a : b : c = 1 : 2 : 3$ とするとき、新商品 100 g の栄養成分 L の含有量は ア g となる。

[2] $y = \frac{1}{8}$ と定めるとき、新商品 100 g の栄養成分 N の含有量が 2 mg 以上になるためには、 x を イ 以上にする必要がある。

[3] この企業は消費者の健康志向を考慮して、新商品 100 g に栄養成分 L を 3 g 以上、栄養成分 M を s g 以上含めたいと考えている。ただし、定数 s は $s > 0$ とする。

(1) $r = 80$, $s = 7.5$ とするとき、 $x + y + z = 1$ が成り立つことにより、 x と y が満たすべき条件は、次の 5 つの不等式

$$x + \boxed{\text{ウ}} y \leq \boxed{\text{エ}} \quad (\text{栄養成分 L が 3 g 以上含まれる条件})$$

$$12x + \boxed{\text{オ}} y \leq \boxed{\text{カ}} \quad (\text{栄養成分 M が 7.5 g 以上含まれる条件})$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + y \leq 1$$

で表される。座標平面上にこれらの不等式を満たす領域を図示して考えると、ドライフルーツの合計仕入れ金額を最小にする割合は $x = \boxed{\text{キ}}$, $y = \boxed{\text{ク}}$, $z = \boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。このとき、新商品 100 g 当たりのドライフルーツの合計仕入れ金額は $\boxed{\text{コ}}$ 円である。

(2) $s = 7.5$ とするとき、 $x = \boxed{\text{キ}}$, $y = \boxed{\text{ク}}$, $z = \boxed{\text{ケ}}$ だけがドライフルーツの合計仕入れ金額を最小にする割合となるのは、 r が $\boxed{\text{サ}} < r < \boxed{\text{シ}}$ の範囲の値をとるときである。

(3) $r = 80$ とするとき、A, B, C の 3 種類のドライフルーツをすべて含んでいる新商品 100 g 当たりのドライフルーツの合計仕入れ金額が最小となるのは、 s が $\boxed{\text{ス}} < s < \boxed{\text{セ}}$ の範囲の値をとるときである。

Ⅲ 一方の面が白，他方の面が黒く塗られたカードが4枚机の上にある。4枚のカードのうち2枚は表の面（見えている面）が白，残り2枚は表の面が黒である。4枚のカードのうち2枚のカードを無作為に選び裏返す。これを1回の試行とする。

この試行を n 回繰り返したとき，表の面が白であるカードと黒であるカードが2枚ずつとなる確率を a_n ，表の面がすべて白となる確率を b_n ，表の面がすべて黒となる確率を c_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

〔1〕 a_1, b_1, c_1 を求めよ。

〔2〕 a_2, b_2, c_2 を求めよ。

〔3〕 a_{n+1} を a_n で表せ。

〔4〕 a_n を求めよ。