問　題　紙

1　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$ の実数解をすべて求めよ。

(2)　実数 p, q が $p + q = pq$ を満たすとする。$X = pq$ とおくとき，$p^3 + q^3$ を X で表せ。

(3)　条件

$$p^3 + q^3 = 50,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p < q$$

を満たす0でない実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

2　t を0でない実数として，x の関数 $y = -x^2 + tx + t$ のグラフを C とする。

(1)　C 上において y 座標が最大となる点Pの座標を求めよ。

(2)　Pと点O(0，0)を通る直線を ℓ とする。ℓ と C がP以外の共有点Qを持つために t が満たすべき条件を求めよ。また，そのとき，点Qの座標を求めよ。

(3)　t は(2)の条件を満たすとする。A(−1，−2)として，$X = \frac{1}{4}t^2 + t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2$ を X で表せ。また，$\mathrm{AP} < \mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件を求めよ。

3　n を自然数とする。表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める。

- 最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら2，裏なら3だけ数直線上を正方向に石を移動させる。コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする。
- $a_n \neq 2n + 2$ の場合は得点を0，$a_n = 2n + 2$ の場合は得点を $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ とする。

たとえば，$n = 3$ のとき，投げたコインが3回とも表のときは得点は0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3 + 6 + 8 = 17$ である。

(1)　n 回のうち裏の出る回数を r とするとき，a_n を求めよ。

(2)　$n = 4$ とする。得点が0でない確率および25である確率をそれぞれ求めよ。

(3)　$n = 9$ とする。得点が100である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点(x_1, y_1)と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点(x_1, y_1, z_1)と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α，β のとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α，β，γ のとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + \ell) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(\ell = a + (n - 1)d)$

24. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

33. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。