

[I] $\triangle ABC$ において、各辺の長さが $AB = 2x + 2$, $BC = 3x - 2$, $CA = 5$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $\cos A = \frac{3}{4}$ のとき、 x の値を求めよ。

(3) $\cos A = \frac{3}{4}$ のとき、 $\triangle ABC$ の外接円の半径、および内接円の半径を求めよ。

〔Ⅱ〕 次の をうめよ。ただし、 ①, ② は a, b の式で、
 ④ は実数値で、 ⑤, ⑥ は x の式で、 ⑦ は複
 素数値でうめよ。

a, b を実数とし、

$$z = a(2 + \sqrt{3}i)^3 + b(2 + \sqrt{3}i)^2 + 49$$

とおく。ただし、 i は虚数単位である。このとき、 z の実部は ①, 虚部
 は $\sqrt{3}$ ② である。 $z = 0$ となる a, b を求めると、 $(a, b) =$ ③
 である。このとき、整式 $ax^3 + bx^2 + 49$ は、

$$ax^3 + bx^2 + 49 = \left(ax + \text{ ④}\right)P(x)$$

と因数分解することができる。ただし、 $P(x)$ は x の 2 次式である。ここで、整
 式 $Q(x)$ を

$$Q(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 + x^2 - 2x + 8$$

により定める。このとき、 $Q(x)$ を $P(x)$ で割ったときの商は ⑤, 余りは
 ⑥ である。さらに、 $Q(2 + \sqrt{3}i) =$ ⑦ である。

〔Ⅲ〕 放物線 $C_1: y = x^2 + px + q$ は直線 $y = x$ 上に頂点をもつとする。 C_1 の頂点の x 座標を t とし、放物線 $y = 1 - x^2$ を C_2 とする。このとき、次の をうめよ。ただし、 ① ~ ④ は t を含む式、 ⑤ ~ ⑦ は数値でうめよ。

(1) p, q を t で表すと $p =$ ① , $q =$ ② である。

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共有点をもつような t の値の範囲は ③ である。

以下においては、 t は ③ の範囲にあるとする。

(3) 2 つの共有点の x 座標を α, β とすると、 $\beta - \alpha =$ ④ である。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。

(4) $\beta - \alpha$ は $t =$ ⑤ において最大値 ⑥ をとる。

(5) $t =$ ⑤ のもとで、 ⑤ $\leq x \leq 0$ において、 C_1, C_2 および直線 $x =$ ⑤ と y 軸で囲まれた部分の面積は ⑦ である。

(以上)