〔Ⅰ〕 次の問いに答えよ。

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\alpha = 2\sin 2\alpha$，$2\sin 2\beta = \tan\beta$，$\cos\gamma = \tan\gamma$ のとき，$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin\gamma$ の値を求めよ。

(2) (1)の $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ に対して，次の関数のグラフの概形を解答欄の座標平面上に図示せよ。

$y = \cos x \ (\alpha \leqq x \leqq \beta)$，$y = 2\sin 2x \ (\alpha \leqq x \leqq \beta)$，$y = \tan x \ (\alpha \leqq x \leqq \beta)$

ただし，3つの曲線，およびそれぞれの交点から $x$ 軸に下ろした垂線のみをかき入れ，途中の議論は述べなくてよい。

(3) (2)の3つの曲線で囲まれた部分の面積を求めると，

$$\boxed{\quad ① \quad} - \frac{1}{2}\log\left(2\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)\right)$$

となる。$\boxed{\quad ① \quad}$，$\boxed{\quad ② \quad}$ を数値でうめよ。ただし，途中の議論も記述せよ。

〔Ⅱ〕 $\alpha$, $\beta$ を異なる2つの複素数とし, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ をそれぞれの共役複素数とする。このとき，次の $\boxed{\phantom{①}}$ をうめよ。ただし, $\boxed{①}$ , $\boxed{②}$ , $\boxed{④}$ , $\boxed{⑤}$ は $\alpha$, $\beta$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ から2個以上選んだものを用いた式でうめ, $\boxed{③}$ は数値でうめよ。

複素数平面において，2点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ を通る直線を $\ell$ とする。また，原点Oを通り，$\ell$ に垂直に交わる直線を $m$ とする。

$z$ を複素数とする。点 $z$ が $\ell$ 上にあるとき, $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数になることから,

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-\left(\boxed{①}\right)\overline{z}=\boxed{②} \tag{1}$$

が成り立つ。

点 $z$ が $m$ 上にあるとき, $\dfrac{z}{\beta-\alpha}$ が純虚数になることから,

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+\left(\boxed{①}\right)\overline{z}=\boxed{③} \tag{2}$$

が成り立つ。

$\ell$ と $m$ の交点を $\mathrm{C}(w)$ とする。このとき，(1), (2)から,

$$w=\frac{\boxed{②}}{\boxed{④}}$$

となる。

ここで,

点 $z$ が線分AB上にある $\iff$ $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が0以上1以下の実数となる

であることを用いて，点 $\mathrm{C}(w)$ が線分AB上にあるための必要十分条件を求めると,

$$2|\alpha|^2-2|\beta-\alpha|^2\leqq\boxed{⑤}\leqq 2|\alpha|^2 \tag{3}$$

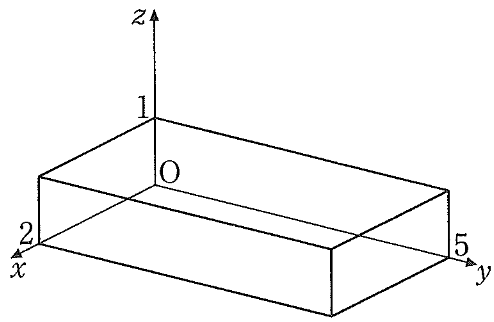
となる。

$i$を虚数単位とする。$a$，$b$を少なくともどちらか一方は0でない実数とし，$\alpha = a + bi$とおく。集合

$$\{\beta \mid \beta \text{は不等式} \ |\beta - (a + bi)| \leqq |a + bi| \ \text{および(3)を満たす}\} \cup \{a + bi\}$$

が定める2つの図形の面積の和を$a$，$b$を用いて表すと，$\boxed{\quad ⑥ \quad}$となる。

〔Ⅲ〕 下の図のような直方体と5点 A$(0,\ 0,\ 2)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(0,\ 2,\ 1)$，D$(2,\ 0,\ 0)$，P$(1,\ 2,\ 1)$をとる。このとき，次の問いに答えよ。




(1) 直線 AC と $y$ 軸の交点を E とするとき，点 E の座標を求めよ。

(2) $\cos \angle\mathrm{BAC}$ の値を求め，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積を求めよ。

(3) 点 P から，3点 A，B，C の定める平面 ABC に下ろした垂線を PH とする。点 H の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から $x$，$z$ を $y$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき，$y$，$s$，$t$ の値を求めよ。

(4) 直方体を平面 ABC で切った切り口を底面，点 P を頂点とする角錐の体積を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{\phantom{000}}$ をうめよ。

(1) 方程式 $x^2 + x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} - 6 = 0$ の解のうち，最小のものは $\boxed{\ ①\ }$ である。

(2) 1枚の硬貨を何回か投げる。表が4回出るか，または，裏が4回出ればこの試行を終了する。このとき，6回以内に試行を終了する確率は $\boxed{\ ②\ }$ である。

(3) 極限値

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{4n-1}{n}\right)^3\right\}$$

を求めると，$S = \boxed{\ ③\ }$ となる。

(4) $a$ は整数とする。2つの不等式 $(x-3)(3x-a) < 0$，$(x-1)(x-5) > 0$ を満たす整数 $x$ が2個だけとなるときの $a$ の最大値は $\boxed{\ ④\ }$ であり，最小値は $\boxed{\ ⑤\ }$ である。

(5) $n$ は6以上の自然数とする。

$$\log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \ \cdots\cdots \ \cdot \log_n (n+1)$$

が自然数となるような $n$ はすべて

$$\boxed{\ ⑥\ }^m - 1 \quad (m \text{ は2以上の自然数})$$

の形で表される。このとき，$n$ を4で割ったときの余りは $\boxed{\ ⑦\ }$ である。

(以上)