1. cを正の実数とする。各項が正である数列$\{a_n\}$を次のように定める。a_1は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{c})$$

が最大値をとるときのxの値とする。a_{n+1}は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n})$$

が最大値をとるときのxの値とする。数列$\{b_n\}$を$b_n = \log_2 a_n$で定める。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) a_1をcを用いて表せ。

(2) b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3) 数列$\{b_n\}$の一般項をnとcを用いて表せ。

2. a，b，cは実数で，$a \neq 0$とする。放物線Cと直線ℓ_1，ℓ_2をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$
$$\ell_1 : y = -3x + 3$$
$$\ell_2 : y = x + 3$$

で定める。ℓ_1，ℓ_2がともにCに接するとき，以下の問に答えよ。
(配点30点)

(1) bを求めよ。またcをaを用いて表せ。

(2) Cがx軸と異なる2点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) Cとℓ_1の接点をP，Cとℓ_2の接点をQ，放物線Cの頂点をRとする。aが(2)の条件を満たしながら動くとき，△PQRの重心Gの軌跡を求めよ。

3. nを自然数とする。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ずnの約数となるようなnを小さい順に3つ求めよ。

(2) 1個のサイコロを投げて出た目がnの約数となる確率が$\dfrac{5}{6}$であるようなnを小さい順に3つ求めよ。

(3) 1個のサイコロを3回投げて出た目の積が160の約数となる確率を求めよ。

4. 1辺の長さが$\sqrt{2}$の正方形ABCDを底面にもち，高さが1である直方体ABCD-EFGHを，頂点の座標がそれぞれ

$$\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}(0,1,0),\ \mathrm{C}(-1,0,0),\ \mathrm{D}(0,-1,0),$$
$$\mathrm{E}(1,0,1),\ \mathrm{F}(0,1,1),\ \mathrm{G}(-1,0,1),\ \mathrm{H}(0,-1,1)$$

になるようにxyz空間内におく。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) 直方体ABCD-EFGHを直線AEのまわりに1回転してできる回転体をX_1とし，また直線ABのまわりに1回転してできる回転体をX_2とする。X_1の体積V_1とX_2の体積V_2を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 1$とする。平面$x=t$と線分EFの共有点の座標を求めよ。

(3) 直方体ABCD-EFGHをx軸のまわりに1回転してできる回転体をX_3とする。X_3の体積V_3を求めよ。

5. 0以上の実数xに対して，

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

と定める。以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数αに対して，$f(\tan\alpha)$を求めよ。

(2) xy平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad f(x) + f(y) \leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ。