[1] 以下の問いに答えよ．

(1) p を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2-(p-9)x-p+1=0$ の解は整数 m, n で $m<0<n$ が成り立つとする．このとき $mn+m+n=\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ なので，$m=\boxed{(3)}\boxed{(4)}$, $n=\boxed{(5)}$, $p=\boxed{(6)}\boxed{(7)}$ である．

(2) θ は $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の定数とする．$x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}\sin 2\theta$ かつ $\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}\bigl(\cos 2\theta+1\bigr)$ であるので，$y=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ とすると，

$$y=\frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}\sin(2\theta+\alpha)+\boxed{(14)}$$

と表せる．ただし，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$, $\sin\alpha=\dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$ である．また，$|x|\leqq 1$ に対応する θ の範囲が $|\theta|\leqq\dfrac{\pi}{\boxed{(19)}}$ であることに注意すると，$|x|\leqq 1$ における y の取りうる値の最大値は $\dfrac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}}$ である．

[2] 袋の中に，1から9までの番号を重複なく1つずつ記入したカードが9枚入っている．A, B, C, Dの4人のうちDがさいころを投げて，1の目が出たらAが，2または3の目が出たらBが，その他の目が出たらCが，袋の中からカードを1枚引き，カードに記入された番号を記録することを試行という．ただし，1度引いたカードは袋に戻さない．この試行を3回続けて行う．また，1回目の試行前のA, B, Cの点数をそれぞれ0としたうえで，以下の(a), (b)に従い，各回の試行後のA, B, Cの点数を定める．

(a) 各回の試行においてカードを引いた人は，その回の試行前の自分の点数に，その回の試行で記録した番号を加え，試行後の点数とする．

(b) 各回の試行においてカードを引いていない人は，その回の試行前の自分の点数を，そのまま試行後の点数とする．

(1) 1回目の試行後，Bの点数が3の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}}$ である．ただし，0はすべての整数の倍数である．

(2) 2回目の試行後，A, B, Cのうち，1人だけの点数が0である確率は $\dfrac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$ である．

(3) 2回目の試行後のAの点数が5以上となる確率は $\dfrac{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$ である．

(4) 2回目の試行後のAの点数が5以上であるとき，3回目の試行後のA, B, Cの点数がすべて5以上である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}\boxed{(39)}}$ である．

[3] 実数 a に対して $f(a) = \dfrac{1}{2}\left(2^a - 2^{-a}\right)$ とおく．また，$A = 2^a$ とする．

(1) 等式 $\left(A - \dfrac{1}{A}\right)^3 = \boxed{(40)}\left(A^3 - \dfrac{1}{A^3}\right) - \boxed{(41)}\left(A - \dfrac{1}{A}\right)$ より，実数 a に対して

$$\{f(a)\}^3 = \frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}f(3a) - \frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}}f(a) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

が成り立つ．

(2) 実数 a, b に対して $f(a) = b$ が成り立つならば，$A = 2^a$ は 2 次方程式

$$A^2 - \boxed{(46)}bA - \boxed{(47)} = 0$$

を満たす．$2^a > 0$ より，a は b を用いて

$$a = \log_2\left(\boxed{(48)}b + \sqrt{b^2 + \boxed{(49)}}\right) \quad \cdots\cdots \quad ②$$

と表せる．つまり，任意の実数 b に対して $f(a) = b$ となる実数 a が，ただ 1 つ定まる．

以下，数列 $\{a_n\}$ に対して $f(a_n) = b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ が，関係式

$$4b_{n+1}^3 + 3b_{n+1} - b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

を満たすとする．

(3) ①と③から $f\left(\boxed{(50)}a_{n+1}\right) = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ となるので，**(2)** より，$a_n = \dfrac{a_1}{\boxed{(51)}^{n-p}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が得られる．ここで，$p = \boxed{(52)}$ である．

(4) $n \geqq 2$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^{k-1}b_k^3$ とおく．$c_n = 3^n b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定まる数列 $\{c_n\}$ の階差数列を用いると，③より，

$$S_n = \frac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}}b_1 - \frac{\boxed{(55)}^n}{\boxed{(56)}}b_n \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

となる．ゆえに，$b_1 = \dfrac{4}{3}S_5 - 108$ が成り立つならば，

$$a_1 = \boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}\log_2\boxed{(60)}$$

である．

[4] $p,\ q$ を正の実数とし，O を原点とする座標空間内に 3 点 A $(3, -\sqrt{3}, 0)$, B $(3, \sqrt{3}, 0)$, C $(p, 0, q)$ をとる．ただし，四面体 OABC は 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正四面体であるとする．

(1) p および q の値を求めよ．

以下，点 $\left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{q}{2}\right)$ に関して O, A, B, C と対称な点を，それぞれ D, E, F, G とする．

(2) 直線 DG と平面 ABC の交点 H の座標を求めよ．

(3) 直線 CB と平面 DEG の交点を I，直線 CA と平面 DFG の交点を J とする．四角形 CJHI の面積 S と四角錐 G-CJHI の体積 V を，それぞれ求めよ．

[5] xを正の実数とする．mとnは，それぞれ$m \leqq \log_4 \dfrac{x}{8}$，$n \leqq \log_2 \dfrac{8}{x}$を満たす最大の整数とし，さらに，$\alpha = \log_4 \dfrac{x}{8} - m$，$\beta = \log_2 \dfrac{8}{x} - n$とおく．

(1) $\log_2 x$を，mとαを用いて表せ．

(2) $2\alpha + \beta$の取りうる値をすべて求めよ．

(3) $n = m - 1$のとき，mとnの値を求めよ．

(4) $n = m - 1$となるためにxが満たすべき必要十分条件を求めよ．

[6] a, b, p を実数とする．関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 17$ は $x = p$ で極大値，$x = -4p$ で極小値をとり，$f(-2p) = -17$ を満たすとする．

(1) a, b, p の値，および $f(x)$ の極大値 M，極小値 m を，それぞれ求めよ．

(2) **(1)** で求めた a, b および $0 \leqq t \leqq 5$ を満たす実数 t に対して，区間 $0 \leqq x \leqq t$ における $|f(x)|$ の最大値を $g(t)$ とする．t の値について場合分けをして，それぞれの場合に $g(t)$ を求めよ．

(3) **(2)** で求めた $g(t)$ に対して，定積分 $I = \displaystyle\int_0^5 g(t)dt$ を求めよ．