1

(30 点)

四面体 OABC が次を満たすとする.

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1,\quad \angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{ACB},\quad \angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ.

2

(30 点)

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ.

(1) p_3 を求めよ.

(2) p_4 を求めよ.

3

(30 点)

a は正の定数とする．次の関数の最大値を求めよ.

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

4

(30 点)

ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった．このような自然数で最大のものを求めよ．ただし，必要なら次を用いてもよい．

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

5

(30 点)

関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする．このとき，下の条件を満たすような正の実数 a，b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ．

「C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ．」