

1

(30 点)

n 個の異なる色を用意する. 立方体の各面にいずれかの色を塗る. 各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする. 辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) p_4 を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

2

(30 点)

$|x| \leq 2$ を満たす複素数 x と, $|y - (8 + 6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して, $z = \frac{x+y}{2}$ とする. このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し, その面積を求めよ.

3

(30 点)

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 線分 OA の中点を P , 線分 AB の中点を Q とする. 実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める.

$$\overrightarrow{OX} = x \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BY} = y \overrightarrow{BC}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ.

4

(30 点)

与えられた自然数 a_0 に対して、自然数からなる数列 a_0, a_1, a_2, \dots を次のように定める.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.
- (2) a_0, a_1, \dots, a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.

5

(40 点)

a は $a \geq 1$ を満たす定数とする. 座標平面上で、次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする.

$$x \geq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq y, \quad y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leq a$$

次の問いに答えよ.

- (1) D_a の面積 S_a を求めよ.
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a$ を求めよ.

6

(40 点)

自然数 k に対して、 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする. n を自然数とし、 a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする. また、 a_k の整数部分が n 桁であり、その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする. 次を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし、例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で、最高位の数字は 2 である.