1 nを2以上の自然数とする。自然数の組$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$を解とする方程式

$$(*) \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $n = 3$のとき，$(*)$の解(a_1, a_2, a_3)のうち，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$を満たすものをすべて求めよ。

(2) $n \geqq 3$のとき，$(*)$の任意の解$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$において，$a_i = 1$となるiが少なくとも1つ存在することを示せ。

(3) $(*)$のある解$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$において，$a_i = 1$となるiがちょうど2個存在しているとする。このとき，nの取り得る値をすべて求めよ。

2 xyz 空間において，点 $\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(0,1,0)$，$\mathrm{C}(-1,0,0)$，$\mathrm{D}(0,0,1)$ をとり，線分 CD の中点を M とする。さらに，N を線分 BD 上の点とする。また，z 軸と平行でない直線上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$，$\mathrm{Q}(x',y',z')$ に対して，

$$\frac{z'-z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$$

をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の勾配と呼ぶ。$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ の勾配を t_1，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ の勾配を t_2 とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $t_2=0$ となるように N をとったとき，t_1 の値を求めよ。

(2) $l=|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NM}}|$ とし，l が最小となるように N をとったとき，l の値を求めよ。

(3) $0 \leqq t_2 \leqq t_1$ となるように N をとったとき，N の y 座標を s とする。s がとり得る値の範囲を求めよ。

3 $f(x)$を連続関数とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(1 - t^2)\,dt$$

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{\sin 2x}}\,dx$$