数　　　　学

〔Ⅰ〕 次の $\boxed{\quad\quad}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号の付いた $\boxed{\quad\quad}$ の中に記入せよ。

(1) 平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2}{3}\pi$，$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{AB} = 3$ である。$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\quad ア \quad}$ である。

(2) 正の実数 c に対して，t の1次式で表された関数 $f(t)$ は等式 $\displaystyle\int_c^x tf(t)dt = x^3 + cx^2 - c^3 - 5c^2$ をみたしている。このとき，定数 c の値は $c = \boxed{\quad イ \quad}$ である。したがって，$f(t) = at + b$ とおくと，定数 a，b の値はそれぞれ $a = \boxed{\quad ウ \quad}$，$b = \boxed{\quad エ \quad}$ である。

(3) 例えば，自然数 100 を 2 進法で表すと $1100100_{(2)}$ であり，3 進法で表すと $10201_{(3)}$ である。3 進法で $210210_{(3)}$ で表される自然数を 9 進法で表すと $\boxed{\quad オ \quad}$ となる。p を 3 以上の自然数とする。p 進法で表すと 6 桁の数 $222222_{(p)}$ となる自然数を，p^2 進法で表すと 3 桁の数 $888_{(p^2)}$ となるとき，$p = \boxed{\quad カ \quad}$ である。q を 3 以上の自然数，また s を $1 \leqq s \leqq q-1$，かつ，$s \leqq 9$ をみたす整数とする。q^2 進法で 4 桁の数 $7777_{(q^2)}$ となる自然数が，q 進法で 8 桁の数 $ssssssss_{(q)}$ となった。このとき $q = \boxed{\quad キ \quad}$ である。

(4) $f(x) = \log_8(2x-3)$，$g(x) = \dfrac{1}{3}\log_2 x$ とおく。xy 平面において，$y = g(x)$ のグラフを x 軸方向に A，y 軸方向に B だけ平行移動すると $y = f(x)$ のグラフに重なる，すなわち，$f(x) = g(x-A)+B$ が成り立つような定数 A，B の値は $A = \boxed{\quad ク \quad}$，$B = \boxed{\quad ケ \quad}$ である。不等式 $3\log_8(2x-3) \leqq 2 + \log_2 5 + \log_{0.5} x$ をみたす x の値の範囲は，$\boxed{\quad コ \quad}$ である。

〔 II 〕 $f(x) = x^3 - 4x + 2$ と，xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える。n を自然数，a を正の実数とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{S_n\}$ を (i) から (iii) のように定める。

(i) $a_1 = a$ とする。

(ii) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n, f(a_n))$ における C の接線を ℓ_n としたとき，点 $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ は，曲線 C と直線 ℓ_n との共有点のうち，点 $\mathrm{P}_n(a_n, f(a_n))$ と異なる点である。

(iii) S_n は，ℓ_n と C に囲まれた部分の面積である。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(a, f(a))$ における C の接線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) 自然数 n に対して，S_n を a を用いて表せ。

(4) $a = 2$ のとき，S_n が 10^{100} を超える自然数 n のうち，最小のものの値を求めよ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ である。

〔 III 〕 s，t を 2 つの正の実数とする。ただし，$s = 1$ と $t = 1$ が同時に成り立つことはないとする。平面において，$\triangle\mathrm{OAB}$ は，1 辺の長さが 1 の正三角形である。2 点 C，D は $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす。線分 AC の垂直 2 等分線と線分 BD の垂直 2 等分線の交点を E とおく。さらに，線分 AD，線分 OE，線分 BC の中点をそれぞれ L，M，N とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$ のとき，x の値を求めよ。

(2) 線分 CD の長さを s，t を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s$，$t$ を用いて表せ。

(4) 線分 CD の長さが 1 のとき，s，t の値にかかわらず，L，M，N は，同一直線上にあることを示せ。また，CD の長さが 1 であり，かつ，$s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，線分 LM と線分 LN の長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LN}}$ を求めよ。