1 (50点)

図1のような，一辺の長さがℓの立方体である4つのブロックA，A′，B_1，B_2のうちいくつかと，質量の無視できる伸び縮みしない糸を用いて実験を行う。AとA′は質量の無視できる立方体の一辺の中点に質量mの小球が取り付けられたものである。Aはすべての面が滑らかであるのに対して，A′は小球に接する2つの面の片方が滑らかではない。B_1とB_2はいずれも質量m'の均質な立方体である。重力加速度の大きさをgとする。必要であれば以下の公式を用いてよい。

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

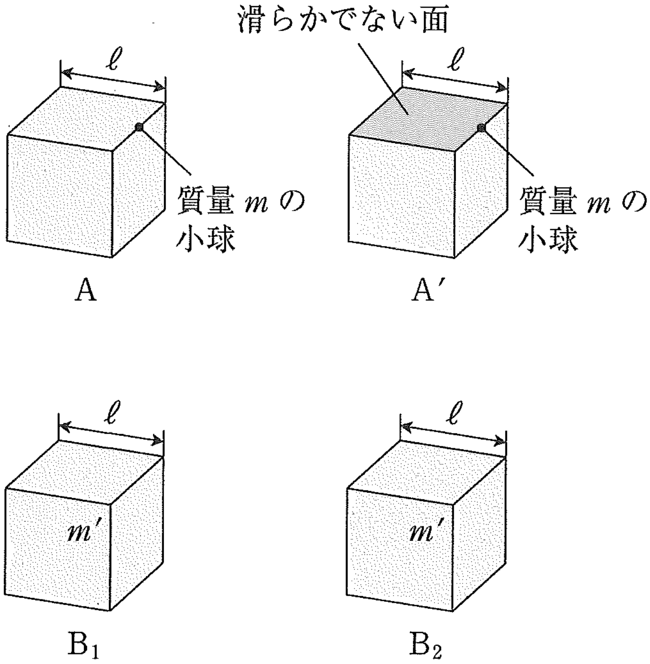

図1

〔A〕 図2のように，水平な床の上にB_1とB_2を間隔ℓをあけて置き，互いにたるみなく糸で水平につないだ。B_1とB_2の上に，小球を下にしたAを左右対称になるように静かに置いた。図2において3つのブロックの正面は同一の鉛直面内にある。また，糸は3つのブロックの中心を含む鉛直面内にある。ブロックどうし及びブロックと床の間に摩擦ははたらかない。B_1とB_2はいずれも傾くことはないとして，以下の問いに答えよ。

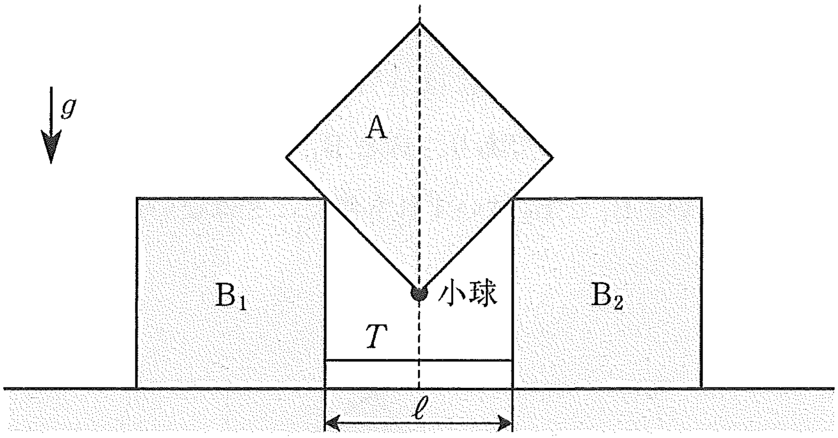

図2

(a) 糸の張力の大きさTを求めよ。

糸を静かに切ると，B_1とB_2の間隔が広がっていくとともに，Aが向きを保ったまま下がっていき，B_1とB_2の間隔が$\sqrt{2}\ell$を超えたところでAはB_1とB_2から離れて落下した。運動中，切断された糸はブロックの運動を妨げないものとする。

(b) 糸を切ったときから，AがB_1とB_2から離れるまでの間のAの移動距離を求めよ。

(c) Aが床に接触する直前のAの速さv_AとB_1の速さv_Bを，g，ℓ，m，m'を用いて表せ。

〔B〕 図3のように，水平な床の上に B_1 と B_2 を間隔 ℓ をあけて置き，互いにたるみなく糸で水平につないだ。B_1 と B_2 の上に，小球を下にして滑らかでない面が B_2 の辺に接するように A′ を傾けて静かに置いた。図3において3つのブロックの正面は同一の鉛直面内にある。また，糸は3つのブロックの中心を含む鉛直面内にある。この鉛直面による A′ の断面において，初めに A′ が置かれたときに小球を含む対角線と鉛直線のなす角を θ_0 とする。$|\theta_0| < \dfrac{\pi}{4}$ の場合のみを考える。図3のように小球が B_1 よりも B_2 に近いとき，θ_0 は正とする。θ_0 がある範囲内 $|\theta_0| \leqq \theta_{\max}$ にあるとき，A′ は静止し続け，$|\theta_0| > \theta_{\max}$ である場合には A′ は滑って向きを変化させた。A′ と B_2 の間の静止摩擦係数は μ であり，床と B_1，床と B_2，B_1 と A′ の間には摩擦ははたらかない。B_1 と B_2 はいずれも傾くことはないとして，以下の問いに答えよ。

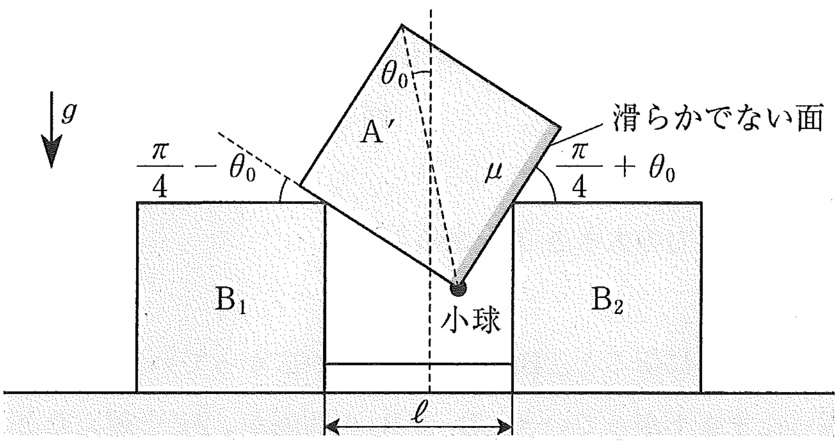

図3

(d)　$|\theta_0| \leqq \theta_{\max}$ のとき，A′ が B_2 に及ぼす垂直抗力の大きさ N_2 を，g，m，θ_0 を用いて表せ。

(e)　$|\theta_0| \leqq \theta_{\max}$ のとき，A′ が B_1 に及ぼす垂直抗力の大きさ N_1 を，θ_0，N_2 を用いて表せ。

(f)　$|\theta_0| \leqq \theta_{\max}$ のとき，B_2 が A′ に及ぼす摩擦力の大きさ F を，g，m，θ_0 を用いて表せ。

(g)　μ を $\theta_{\max}$ を用いて表せ。

〔C〕 図4のように，水平な床の上にB_1とB_2を間隔ℓをあけて置き，互いにたるみなく糸で水平につないだ。加えて，B_2と壁を糸でたるみなく水平につなぎ，B_1は滑らかな滑車を通して質量Mのおもりと糸でつないだ。滑車とB_1の間の糸は水平である。小球を下にしたAをB_1とB_2の上に傾けて置き，静かに放す。Mが十分大きく，B_1とB_2がいずれも静止したままである場合には，小球は床からの高さℓの点Pを中心として単振り子と同じ運動をする。図4において3つのブロックの正面は同一の鉛直面内にある。また，点P及びすべての糸は3つのブロックの中心を含む鉛直面内にある。この鉛直面によるAの断面において，小球を含む対角線と鉛直線のなす角をθとする。図4のように小球がB_1よりもB_2に近いとき，θは正とする。点Pと小球を通る直線と鉛直線のなす角は2θである。ブロックどうし及びブロックと床の間に摩擦ははたらかない。B_1とB_2はいずれも傾くことはないとする。初めにAが置かれたときのθをθ_0とし，$|\theta_0| < \frac{\pi}{4}$の場合のみを考える。以下の問いに答えよ。

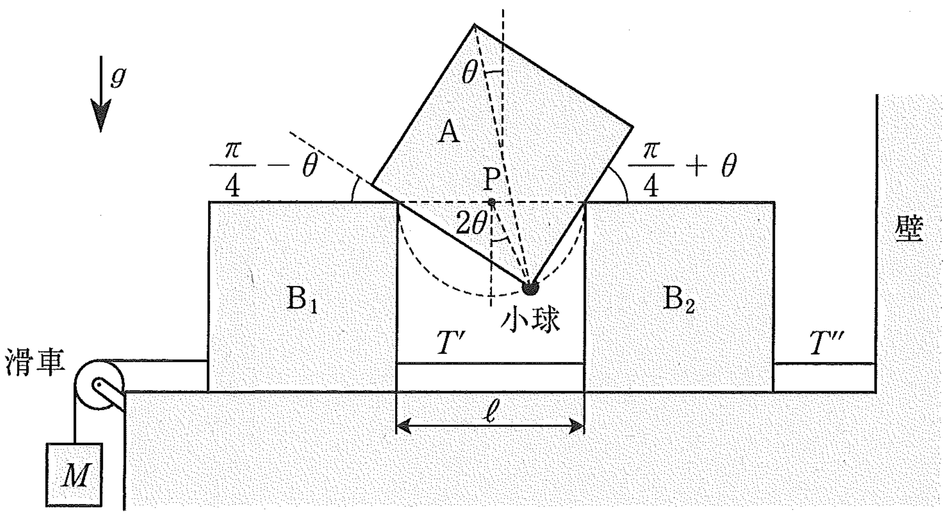

図4

まず，Mが十分大きく，Aの運動中，B_1とB_2がいずれも静止したままである場合を考える。

(h) 単振り子と同じ運動をする小球の速さvを，g，ℓ，θ，θ_0を用いて表せ。また，B_1がAに及ぼす力とB_2がAに及ぼす力の合力の大きさGを，g，m，θ，θ_0を用いて表せ。

(i) B_1とB_2をつなぐ糸の張力の大きさT'，及びB_2と壁をつなぐ糸の張力の大きさT''を，G，g，M，θを用いて表せ。

次に，いろいろな質量Mのおもりを用いて実験すると，Mがある値M_{min}よりも大きい場合には運動開始時の角θ_0を$|\theta_0| < \dfrac{\pi}{4}$の範囲でどのように選んでも$B_1$と$B_2$は動かないが，$M_{\mathrm{min}}$よりも小さい場合には$\theta_0$の値によってはAの運動中$B_1$と$B_2$の両方またはいずれかが動いた。

(j) M_{min}をmを用いて表せ。

2 (50点)

図1のように，長さrの導線ab，cdと長さℓの導線bcを直角につないで作ったコの字形の導線Xを，水平に固定された直線状の導線Yにつり下げて作った長方形の回路abcdを考える。Yの区間adの一部は電池，抵抗器，コイル，スイッチで作った装置Zで置き換えることができ，Yの両端は絶縁されている。XはYを軸に滑らかに回転できるが，平行移動や変形をしないものとする。なお，YとZは動かない。ab，cdの質量は無視でき，bcの質量はmであり，重力加速度の大きさをgとする。また，磁束密度の大きさがBである鉛直上向きの磁場が一様に存在している。導線の太さと電気抵抗，コイル以外の自己インダクタンス，電池の内部抵抗，空気抵抗はすべて無視できるものとする。

回路を流れる電流の正の向きをa→b→c→dと定める。また，aを通る鉛直方向の直線とabがなす角をθとし，aからbに向かう向きが鉛直下向きのときに$\theta = 0$であり，a→b→c→dの向きに回る右ねじが進む向きをθの正の向きと定める。さらに，Xの角速度をωとし，微小な時間Δtの間にθが$\Delta\theta$だけ変化するとき，$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$である。

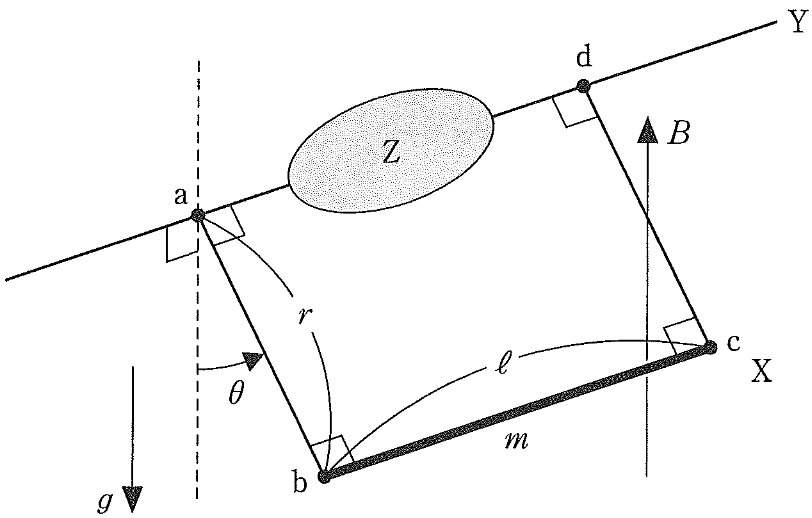

図1

〔A〕 図2のように，電圧 V の電池，抵抗値 R の抵抗器，スイッチSを使ってZを作り，ad の一部を置き換える。スイッチを p 側に入れると抵抗器のみを通して，q 側に入れると抵抗器と電池を通して回路が閉じる。電池は正の向きに電流を流そうとする向きに設置されている。以下の問いに答えよ。

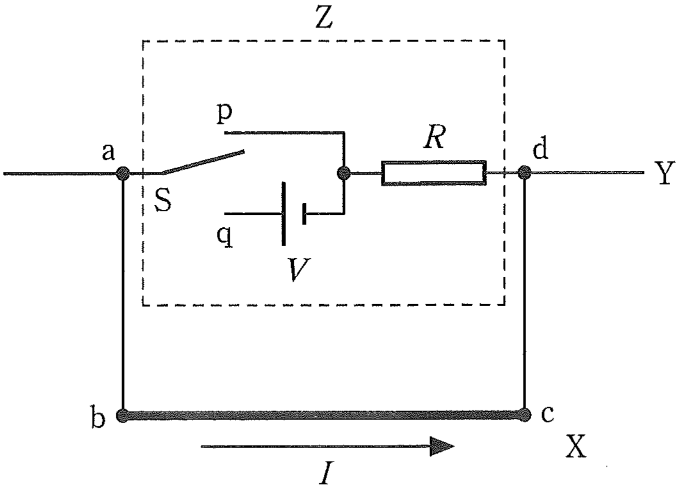

図2

(a) まずスイッチを p 側に入れ，X が水平になるように $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の位置まで bc をゆっくり持ち上げた。回路に電流が流れていないことを確認してから bc を静かに放したところ，X は Y を軸に運動をした。ある時刻において回路を流れる電流 I を，r, ℓ, B, R, θ, ω のうち必要な記号を用いて表せ。

(b) 問(a)において ab，bc，cd が磁場から受ける力の大きさ F_{ab}, F_{bc}, F_{cd} を，それぞれ r, ℓ, B, $|I|$, $|\theta|$ のうち必要な記号を用いて表せ。

(c) 十分に長い時間が経つと，$\theta = 0$ の位置で X は静止した。bc を放してから $\theta = 0$ の位置で X が静止するまでの間に抵抗で発生したジュール熱 Q を，r, ℓ, m, g, B, R のうち必要な記号を用いて表せ。

(d) $\theta = 0$ の位置で X が静止した状態でスイッチを q 側に入れたところ，X は Y を軸に運動をし，十分に長い時間が経つと $\theta = \theta_1$ の位置で X は静止した。このとき $\tan\theta_1$ を，r, ℓ, m, g, B, V, R のうち必要な記号を用いて表せ。

〔B〕 図3のように，自己インダクタンスLのコイルとスイッチSを使ってZを作り，adの一部を置き換える。スイッチを入れるとコイルを通して回路が閉じる。スイッチを切った状態でXが水平になるように$\theta = \frac{\pi}{2}$の位置までbcをゆっくり持ち上げた。その後，スイッチを入れてからbcを静かに放したところ，XはYを軸に$\theta = \theta_2$と$\frac{\pi}{2}$の間を往復する周期的な運動をした。以下の問いに答えよ。

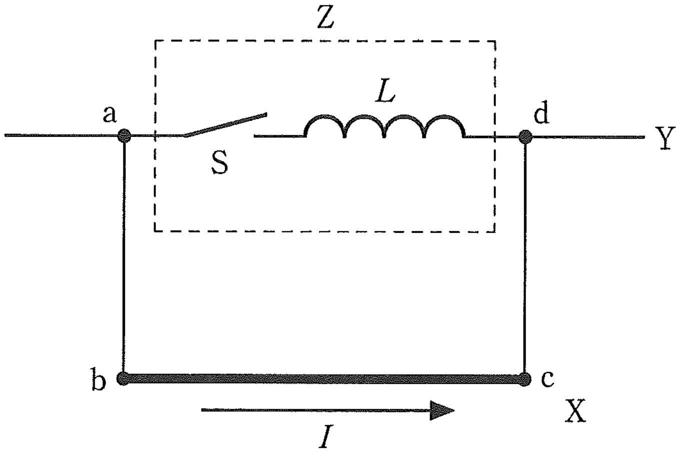

図3

(e) $\theta = \theta_2$となる瞬間に回路を流れる電流I_2の大きさをエネルギー保存則から求め，r，ℓ，m，g，L，θ_2のうち必要な記号を用いて表せ。

(f) 以下の文章中の空欄(ア)〜(エ)にあてはまる数式または数値を答えよ。ただし，(ア)はr，ℓ，B，L，θ，$\Delta\theta$，(イ)〜(エ)はr，ℓ，B，Lのうち必要な記号を用いて表せ。

ある時刻から微小な時間Δtの間にθが$\Delta\theta$だけ変化するとき，電流Iの変化ΔIは$\Delta I =$ $\boxed{(ア)}$ と求まる。θが$\Delta\theta$だけ変化するときの$\sin\theta$の変化は$\Delta\theta\cos\theta$であることを用いると，Iの変化と $\boxed{(イ)}$ $\times \sin\theta$の変化は等しいことがわかる。よって，両者の差である$C = I -$ $\boxed{(イ)}$ $\times \sin\theta$は時刻によらない定数となる。特に$\theta = \frac{\pi}{2}$のとき$I =$ $\boxed{(ウ)}$ であることから，$C =$ $\boxed{(エ)}$ と定まるので，任意の時刻において$I =$ $\boxed{(イ)}$ $\times \sin\theta +$ $\boxed{(エ)}$ が成り立つ。

(g)　$\theta_2 = 0$ となるような磁束密度の大きさ B_0 を，r，ℓ，m，g，L のうち必要な記号を用いて表せ。ただし，解が複数ある場合にはすべての解を列挙し，解がない場合には「$B_0 =$ 解なし」と解答せよ。

また，θ_2 を B の関数として表したグラフの概形として最も適切なものを図 4 の選択肢 ①〜⑧ から選び，番号で答えよ。

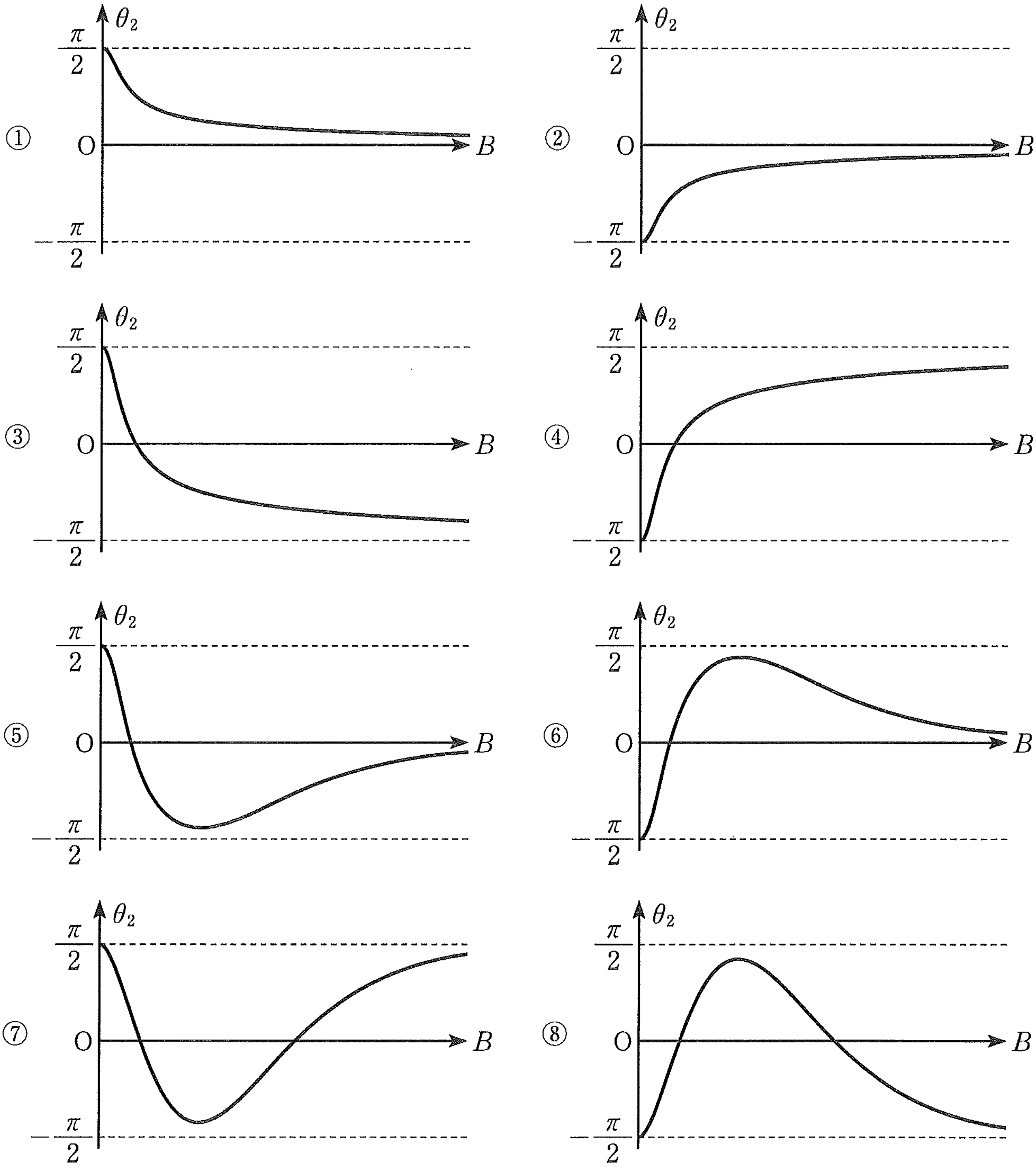

図 4

3 (50 点)

図 1 のようにシリンダーとピストン及び温度調節機からなる装置に理想気体 1 mol が封入されている。必要に応じて温度調節機により気体を加熱あるいは冷却するものとする。初期状態を体積 V_0，圧力 p_0，温度 T_0(状態 0)とする。状態 0 から図 2 に示す体積 $V_e(V_e > V_0)$の状態への以下の 3 通りの変化を考える。

- 定圧変化：変化後の体積 V_e，圧力 p_1，温度 T_1(状態 1)
- 等温変化：変化後の体積 V_e，圧力 p_2，温度 T_2(状態 2)
- 断熱変化：変化後の体積 V_e，圧力 p_3，温度 T_3(状態 3)

ここで，定圧モル比熱を C_p，定積モル比熱を C_V とし，比熱比を $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$，体積比を $a = \dfrac{V_e}{V_0}$ とする。なお，シリンダーとピストンの間には摩擦はないものとする。さらに，気体はシリンダー及びピストンと熱のやり取りをしないものとする。

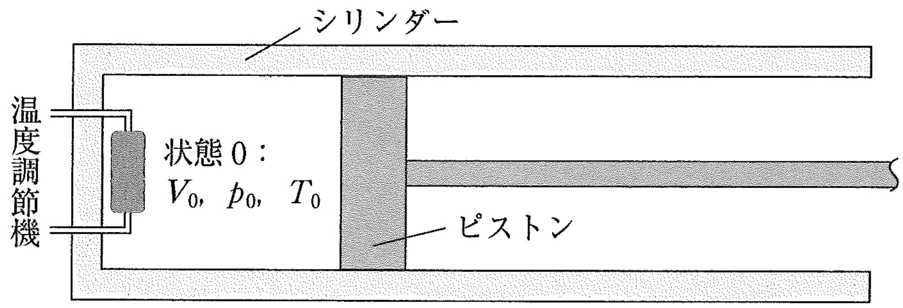

図 1

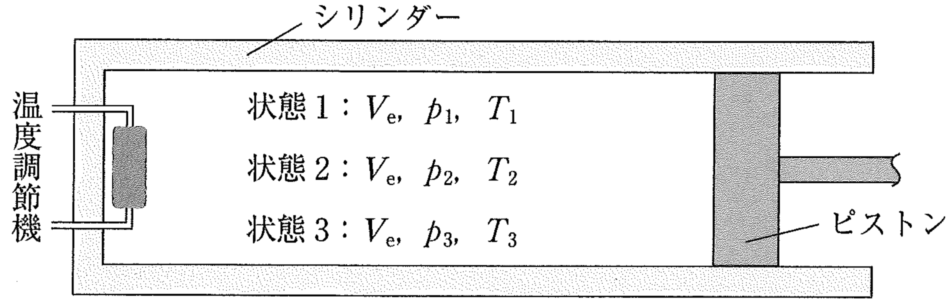

図 2

〔A〕 定圧変化，等温変化，断熱変化において気体が外部にする仕事をそれぞれ W_p，W_T，W_A とし，定圧変化及び等温変化において気体に加える熱量をそれぞれ Q_p，Q_T とする。以下の問いに答えよ。

(a) 定圧変化，等温変化，断熱変化の概略を解答欄に p-V 図として描け。そして W_p，W_T，W_A の大小関係を不等式で表せ。

(b) $\dfrac{W_p}{Q_p}$ 及び $\dfrac{W_T}{Q_T}$ を C_p，C_V を用いた数式，あるいは数値で表せ。

〔B〕 状態0から状態3への断熱変化を用いた熱機関を考える。状態0から状態3への断熱変化の後，圧力を p_3 に保ちながら，体積を V_e から V_0 に戻す。ここで，圧力 p_3，体積 V_0 の状態を状態4とし，その温度を T_4 とする。その後，体積を V_0 に保ちながら気体に熱量 Q を加え，状態4から状態0に戻す。以下の問いに答えよ。

(c) 問〔A〕の W_A と Q の比 $\dfrac{W_A}{Q}$ を a と γ を用いて表せ。

(d) この熱機関の熱効率 e_A は a と γ を用いると以下のように表される。空欄(ア)にあてはまる数式を答えよ。

$$e_A = 1 - \frac{\boxed{\text{(ア)}}}{a^{\gamma} - 1}$$

〔C〕 状態 0 から状態 2 への等温変化を用いた熱機関を考える。ここで状態 0 から状態 2 への等温変化において気体が外部にする仕事は $p_0 V_0 \log_e a$ (e は自然対数の底) と表される。この等温変化後の状態 2 (圧力 p_2) から，体積を V_e に保ちながら状態 3 (圧力 p_3) まで変化させ，その後圧力を p_3 に保ちながら体積を V_e から V_0 に戻す。すなわち問〔B〕と同様に温度 T_4 の状態 4 まで変化させる。その後，体積を V_0 に保ちながら気体に熱量 Q を加え，状態 4 から状態 0 に戻す。以下の問いに答えよ。

(e) 状態 2 から状態 3 への変化において気体が放出する熱量 Q_1 を p_0，V_0，γ，a を用いて表せ。ただし，気体が熱を吸収する場合には熱量は負とする。

(f) この熱機関の熱効率 e_T は a と γ を用いると以下のように表される。空欄(イ)と(ウ)にあてはまる数式を答えよ。

$$e_T = \frac{a^{\gamma} \log_e a + \boxed{\text{(イ)}}}{\boxed{\text{(ウ)}}}$$

〔D〕 状態0から状態1への定圧変化を用いた熱機関を考える。この定圧変化後の状態1 (圧力 p_1)から，体積を V_e に保ちながら状態3 (圧力 p_3)まで変化させ，その後圧力を p_3 に保ちながら体積を V_e から V_0 に戻す。すなわち，問〔B〕及び問〔C〕と同様に温度 T_4 の状態4まで変化させる。その後，体積を V_0 に保ちながら気体に熱量 Q を加え，状態4から状態0に戻す。以下の問いに答えよ。

(g) この熱機関の熱効率 e_p は a と γ を用いると以下のように表される。空欄(エ)にあてはまる数式を答えよ。

$$e_p = \frac{(\gamma-1)(a-1)(a^\gamma-1)}{\boxed{\text{(エ)}}}$$

(h) $a=10$ 及び $\gamma=\dfrac{5}{3}$ として，この熱機関の熱効率 e_p と，問〔B〕及び問〔C〕における熱機関の熱効率 e_A と e_T の3つの大小関係を不等式で表せ。必要に応じて，

$$10^{\frac{5}{3}} \fallingdotseq 46,\ 0.1^{\frac{5}{3}} \fallingdotseq 0.022,\ \log_e 10 \fallingdotseq 2.3$$

であることを用いてよい。