$\boxed{1}$ (60 点)

xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

$\boxed{2}$ (60 点)

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$f'(t) = -f(t)g(t), \qquad g'(t) = \{f(t)\}^2,$$
$$f(t) > 0, \qquad |g(t)| < 1, \qquad f(0) = 1, \qquad g(0) = 0.$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \qquad q(t) = \log\frac{1 + g(t)}{1 - g(t)}$$

とおく.

(1) $p'(t)$ を求めよ.

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.

(3) $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ を求めよ.

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y) = \big(f(t),\ g(t)\big)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ の長さを求めよ.

$\boxed{3}$ (60点)

xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a, 0)$，$\mathrm{B}(0, b)$，$\mathrm{C}(-a, 0)$（ただし $0 < a < b$）をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

4 (60 点)

n を正の整数とし，$C_1, \ldots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で，$k = 1, \ldots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \ldots, 2m) \\ \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \ldots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} Z_{3m}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ (60 点)

整数の組(a, b)に対して2次式$f(x) = x^2 + ax + b$を考える．方程式$f(x) = 0$の複素数の範囲のすべての解αに対して$\alpha^n = 1$となる正の整数nが存在するような組(a, b)をすべて求めよ．