物　　理

1 図1のように，水平でなめらかな床の上に質量Mの台車が置かれている。台車は，ばね定数k，自然長ℓのばねで支柱につながれており，ばねは水平に保たれている。台車の左端と壁の距離をxとする。ばねが自然長の状態にあるとき台車は壁に接しており，$x=0$である。台車と壁の衝突は反発係数eの非弾性衝突とする。重力加速度の大きさをgとして，以下の問(1)〜(3)に答えよ。解答は解答用紙の所定の場所に記入せよ。また，結果だけでなく，考え方や計算の過程も説明せよ。

問(1)　台車を手で押してばねを縮め，$x=d\ (d<\ell)$の位置で静かに手をはなすと，台車は動きはじめ，壁と衝突してはね返った。その後，ばねの伸び縮みにともなって台車は壁との衝突をくり返した。

(a)　手をはなした直後の，台車とばねをあわせた全体の力学的エネルギーEを，M，k，dの中から必要なものを用いて表せ。

(b)　1回目に壁と衝突する直前の台車の速さV_0，および，はね返った直後の台車の速さV_1を，M，k，d，eの中から必要なものを用いて表せ。

(c)　台車が1回目に壁と衝突してから2回目に衝突するまでの時間Tを，M，k，d，eの中から必要なものを用いて表せ。

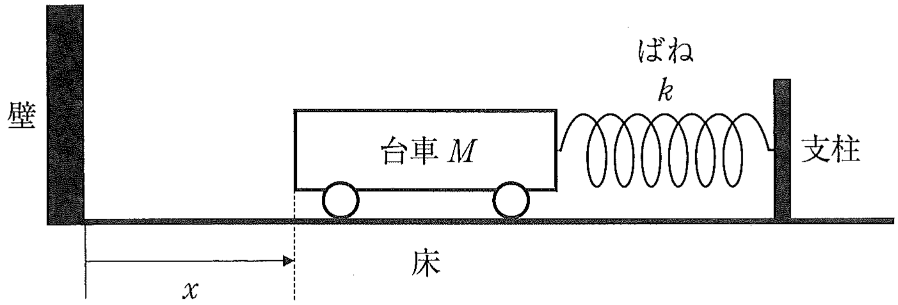

図１

問(2)　次に，図2のように，台車の上に質量 m の小物体を置く。台車の上面は水平であり，小物体と台車の間の静止摩擦係数は μ，動摩擦係数は μ' である。台車を手で押して，$x = d\ (d < \ell)$ になるまでばねを縮めてから静かに手をはなすと，台車と小物体は一体となって動きはじめた。台車が壁と衝突するのと同時に小物体は台車の上ですべりはじめ，台車はばねの伸び縮みにともなって壁との衝突をくり返した。台車が1回目に壁と衝突してから2回目に衝突するまでのあいだ，小物体は台車の上で，台車に対して(すなわち，台車とともに運動する観測者から見て)図の左向きにすべり続けた。また，台車は十分長く，小物体が台車から落ちたり壁に衝突したりすることはなかった。速度および加速度の符号は，台車が壁から遠ざかる向き(図の右向き)を正とする。

(a)　手をはなした後，台車と小物体が一体となって動きはじめるためには，静止摩擦係数 μ がある値 μ_c より大きいことが必要である。μ_c を，M，m，k，d，g を用いて表せ。

(b)　台車が1回目に壁と衝突してから2回目に衝突するまでの運動を考える。台車と小物体の加速度をそれぞれ a，a' として，台車と小物体の運動方程式を，M，m，k，μ'，g，x，a，a' の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。

(c)　問(2)(b)の運動において，1回目に壁と衝突してから時間 t 後の壁と台車の左端との距離 x は，単振動の式

$$x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \delta)$$

で表せる。ここで x_0，A，ω，δ は定数であり，$\omega > 0$ である。x_0 および ω を，M，m，k，μ'，g の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。

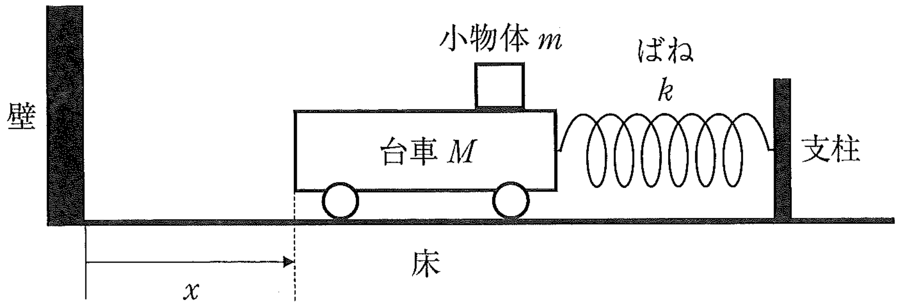

図 2

問(3)　次に，図3のように，台車からばねを取り外し，支柱も取り除く。台車を壁に向けて押し出すと，台車と小物体は一体となって速さv_0で動きはじめた。台車が壁と衝突するのと同時に小物体は台車の上ですべりはじめ，台車が運動しているあいだは台車に対して図の左向きにすべり続けた。台車は壁と衝突してはね返った後，小物体から左向きの摩擦力を受け，再び壁に衝突した。速度および加速度の符号は，台車が壁から遠ざかる向き(図の右向き)を正とする。

(a)　台車が1回目に壁と衝突してから2回目に衝突するまでの運動を考える。運動方程式を用いて，台車が1回目に壁と衝突してから時間t後の台車の速度Vおよび小物体の速度vを，M, m, v_0, e, μ', g, tの中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。

(b)　台車が1回目に壁と衝突してから2回目に衝突するまでの時間T'を，M, m, v_0, e, μ', gを用いて表せ。

(c)　台車と壁の2回目の衝突まで小物体が台車に対して図の左向きにすべり続けるためには，反発係数eがある値e_cより小さいことが必要である。e_cを，M, m, μ'の中から必要なものを用いて表せ。

(d)　台車は壁と衝突をくり返した後，壁に接して完全に静止した。台車が1回目に壁と衝突してから台車が完全に静止するまでの時間T''を，反発係数eおよび問(3)(b)のT'を用いて表せ。ただし，衝突は短時間に起きるため，衝突にかかる時間は無視できるとする。

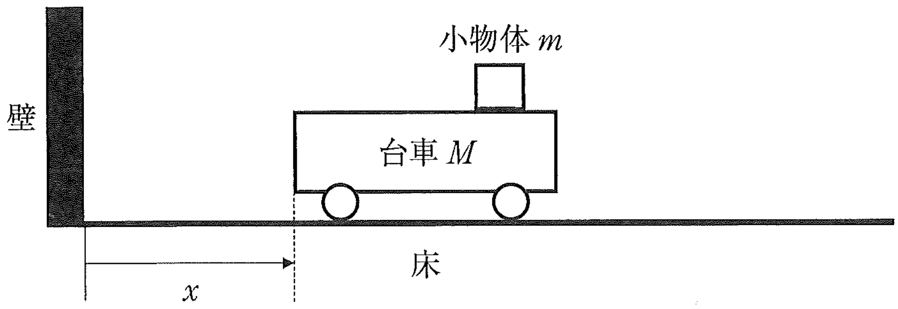

図 3

2 図1のような，抵抗とコンデンサーから構成される回路に関する以下の問(1)～(3)に答えよ。ただし，回路の導線部分の抵抗，電池の内部抵抗，コンデンサーの極板の端における電場(電界)の乱れは無視できるものとする。また，回路は真空中に設置されており，真空の誘電率を ε_0 とする。抵抗を流れる電流は，紙面右向きを正とする。解答は解答用紙の所定の場所に記入せよ。また，結果だけでなく，考え方や計算の過程も説明せよ。

問(1) 図1のように，一辺の長さが ℓ の正方形の極板を距離 d だけ離して平行に置くことで構成した2つのコンデンサー C_A および C_B，起電力が V_0 の電池，抵抗値がともに r である2つの抵抗 R_A および R_B，2つのスイッチ S_A および S_B を接続した回路を考える。d は ℓ に対して十分に小さいものとする。はじめ，S_A および S_B は開いており，C_A および C_B には電荷は蓄えられていない。

(a) S_A を閉じ，十分に時間が経過した後に，C_A に蓄えられている電気量 q_1，および，S_A を閉じてから十分に時間が経過するまでに電池がした仕事 W_1 を，それぞれ，d，ℓ，ε_0，V_0 を用いて表せ。

(b) その後，S_A を開き，次に S_B を閉じた。S_B を閉じた直後に，R_B を流れる電流 i_1 を，d，ℓ，ε_0，V_0，r の中から必要なものを用いて表せ。

(c) S_B を閉じてから十分に時間が経過するまでに，R_B で発生したジュール熱 h_1 を，d，ℓ，ε_0，V_0，r の中から必要なものを用いて表せ。

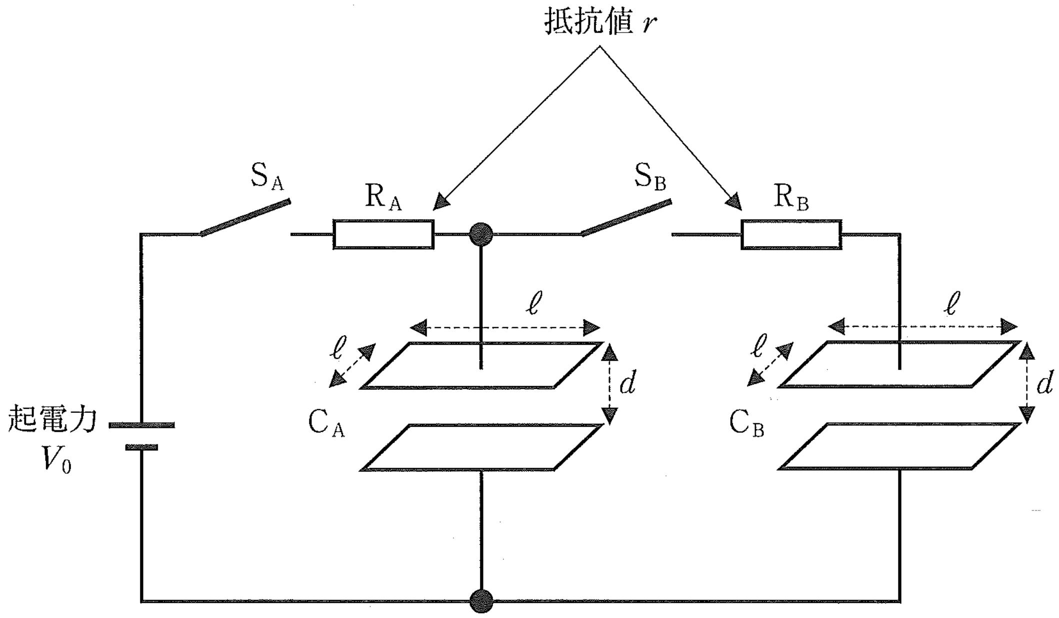

図1

問(2)　次に，図2のように，3辺の長さがℓ，ℓ，dの直方体で，誘電率が$\varepsilon(\varepsilon > \varepsilon_0)$である誘電体を$C_B$の極板間に挿入し，電池を，電圧を自由に変えられる電源に取り換えた。その後，S_AおよびS_Bを閉じ，電源の電圧を$V = V_0$として十分に時間を経過させた。次に，電源の電圧を時間経過とともに一定の割合で増加させた。増加させ始めてからの経過時間がtであるときの電源の電圧は$V(t) = V_0 + at$（定数aは単位時間あたりの電圧の変化量であり，$a > 0$とする）である。

(a)　電源の電圧を増加させ始めてからの経過時間がtであるときに，R_AおよびR_Bを流れる電流をそれぞれ$i_1(t)$および$i_2(t)$とする。このときのC_AおよびC_Bの極板間の電圧をそれぞれ$V_1(t)$および$V_2(t)$とする。$V_1(t)$および$V_2(t)$を，$V(t)$，$i_1(t)$，$i_2(t)$，rの中から必要なものを用いて表せ。

(b)　tが十分に大きくなると，R_AおよびR_Bを流れる電流はそれぞれ一定値I_1およびI_2となった。このとき，C_AおよびC_Bに蓄えられている電気量が時間Δtのあいだに変化する大きさをそれぞれΔq_1およびΔq_2とする。Δq_1およびΔq_2を，d，ℓ，ε_0，ε，V_0，a，r，Δtの中から必要なものを用いて表せ。

(c)　I_1およびI_2を，d，ℓ，ε_0，ε，V_0，a，rの中から必要なものを用いて表せ。

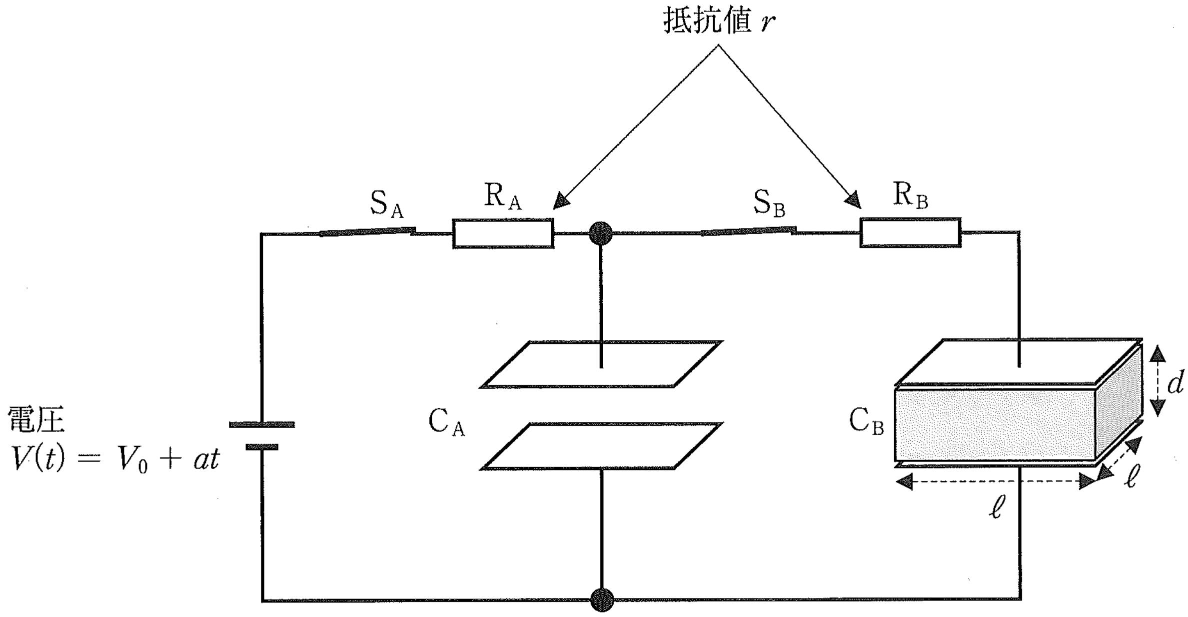

図 2

問(3)　次に，電源を起電力が V_0 の電池に戻し，C_B に挿入していた誘電体を完全に引き出した。その後，S_A および S_B を閉じた状態で，十分に時間を経過させた。次に，図3のように，誘電体を十分に小さい一定の速さ v で C_B の極板間に挿入したところ，誘電体を挿入し始めて十分に時間が経過してから，誘電体が極板間に完全に挿入されるまでのあいだ，R_A および R_B に流れる電流は，それぞれ一定値 I_3 および I_4 になった。誘電体と極板の間に摩擦はないものとする。

(a)　誘電体を挿入しているあいだに，C_B の電気容量が時間 Δt あたりに変化する大きさを Δc とすると，$\Delta c = b\Delta t$ と表される。b を，d，ℓ，ε_0，ε，V_0，r，v の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　R_B に流れる電流 I_4 の向きを図3の(あ)(い)から選び，その理由を簡単に説明せよ。

(c)　I_3 および I_4 を，b，V_0，r を用いて表せ。

(d)　R_A および R_B にそれぞれ一定の電流が流れているあいだ，誘電体を一定の速さ v で挿入するために必要な外力を F とする。ただし，外力は紙面左向き(誘電体を挿入する方向)を正とする。F を，b，V_0，r，v を用いて表せ。また，外力の向きを紙面右向きか紙面左向きかで答えよ。

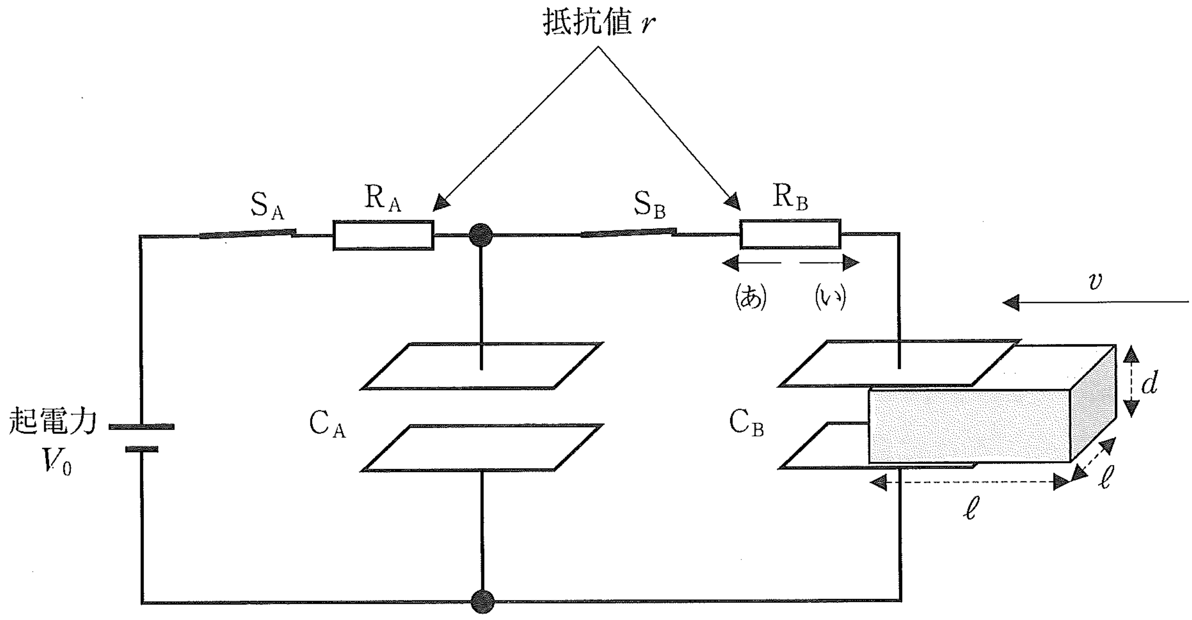

図 3

3 ドローン(小型飛行装置)に小さな音源を取り付けて空気中を移動させる。図1，図2のように，原点Oをとり，水平方向にx軸を，鉛直方向にz軸をとる。音源は振動数f_sの音波を発する。空気中の音速をVとする。風の影響や地面による音波の反射は無視する。以下の問(1)〜(3)に答えよ。解答は解答用紙の所定の場所に記入せよ。また，結果だけでなく，考え方や計算の過程も説明せよ。

問(1) 図1，図2のように，ドローンD_1を音源がx軸上を通るように飛行させ，点Oに置いたマイクで観測した音波を増幅し，スピーカーから気柱管に向けて発した。気柱管の長さはLとする。図1のように気柱管を閉管にした場合は，D_1を一定の速さv_1($v_1 < V$)で点Oから遠ざけたときに，閉管における気柱の共鳴を観測した。図2のように気柱管を開管にした場合は，D_1を速さv_1で点Oに近づけたときに，開管における気柱の共鳴を観測した。開口端補正は無視する。

(a) 図1の場合の，閉管で観測した気柱の共鳴を視覚的に確認するために，多数の小さな軽い粒を気柱管内に入れたところ，気柱内の共鳴現象による音波の振動によって，図3のような，一定の間隔の粒の山ができた。粒の山の位置は，共鳴の定常波(定在波)における腹の位置である。観測された閉管の共鳴現象における音波の固有振動数fを，L，Vを用いて表せ。また，音源の振動数f_sを，L，V，v_1を用いて表せ。

(b) 図2の開管の共鳴における音波の固有振動数を，自然数nを用いてf_nと表す。$n = 1$の場合が基本振動，$n = 2$の場合が2倍振動である。開管のn倍振動f_nの共鳴を観測したとき，音源の振動数f_sを，n，L，V，v_1を用いて表せ。

(c) 問(1)(a)，(b)の結果からv_1を，n，Vを用いて表せ。

(d) $0 < v_1 \leqq \dfrac{2}{13}V$であるとき，開管で観測された$f_n$の$n$の値を求め，このときの音源の振動数$f_s$を，$L$と$V$を用いて表せ。

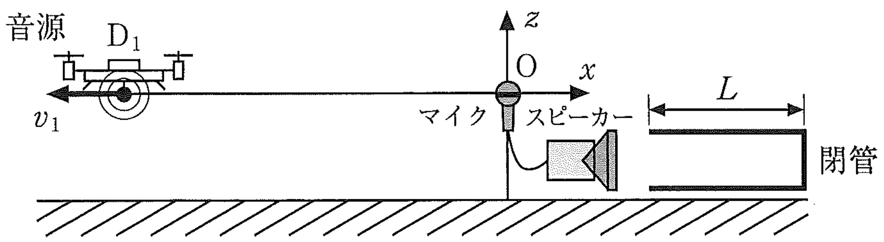
音源
D_1
v_1
z
O
x
マイク
スピーカー
L
閉管

図 1

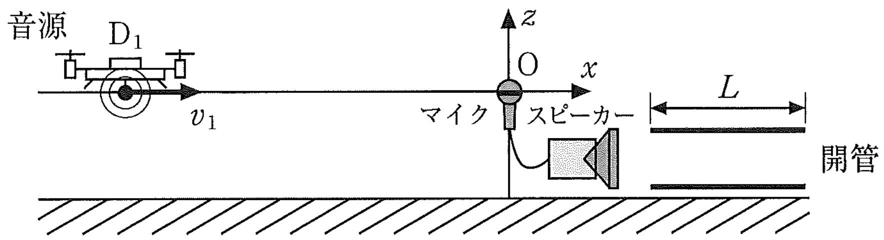
音源
D_1
v_1
z
O
x
マイク
スピーカー
L
閉管

図 2

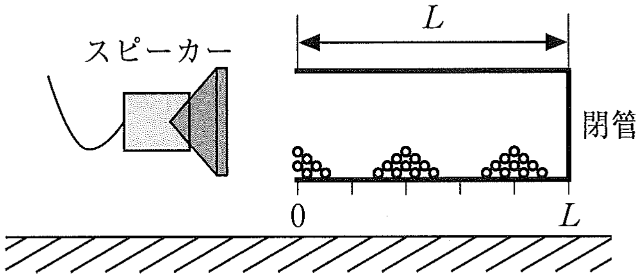
スピーカー
L
閉管
0
L

図 3

問(2)　図4のように，ドローンD_1が一定の速さ$v_1(v_1 < V)$でx軸の真上を正方向に水平移動している。このとき，点Oで音波の振動数を観測する。ある時刻t_0でのD_1の音源の位置を点Pとし，直線OPとx軸とがなす角度をθとする。

(a)　点Pと点Oの間の距離をℓ_1とし，時刻t_0に点Pにある音源から発せられた音波が点Oに到達する時刻をt_1とする。時刻t_0からΔt後の音源の位置を点P′とし，そのときの点P′と点Oの間の距離をℓ_2とする。点P′で発せられた音波が点Oに到達する時刻をt_2とするとき，t_2とt_1の時間差$\Delta T = t_2 - t_1$を，Δt，V，ℓ_1，ℓ_2を用いて表せ。

(b)　ℓ_2を，Δt，v_1，ℓ_1，θを用いて表せ。

(c)　問(2)(a)，(b)の結果からΔTを，Δt，V，v_1，θを用いて表せ。ただし，Δtは十分小さく，$v_1\Delta t \ll \ell_1$を満たすものとする。計算する際，Δtの2乗に比例する項は無視してよい。また，必要があれば，$|x| \ll 1$のときに成り立つ近似式$\sqrt{1 - x} \fallingdotseq 1 - \dfrac{1}{2}x$を用いよ。

(d)　問(2)(c)の結果から，音源が点Pを通過したときに発せられた音波を点Oで観測するときの振動数f_Pを，V，v_1，f_s，θを用いて表せ。

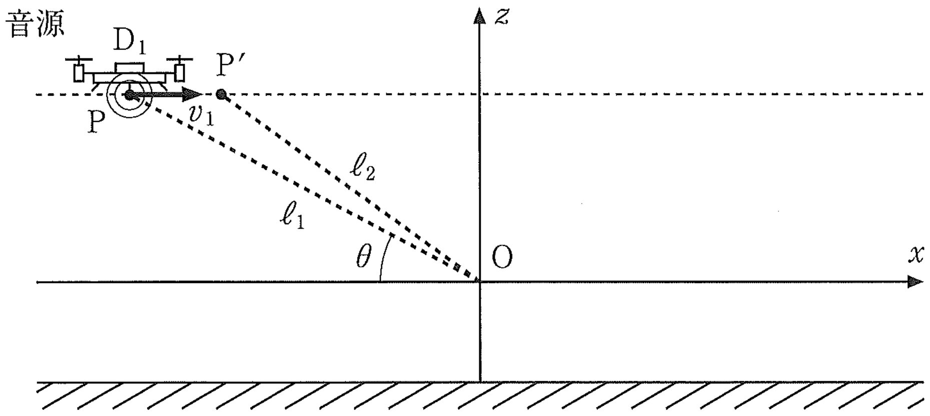

図 4

問(3)　図5のように，ドローン$\mathrm{D_1}$とドローン$\mathrm{D_2}$が同じ高さを保ちながら，x軸の真上を，それぞれ一定の速さ$v_1(v_1 < V)$と$v_2(v_2 < V)$で正方向に水平移動している。$\mathrm{D_2}$には，マイクとスピーカーが取り付けてある。$\mathrm{D_2}$は，$\mathrm{D_1}$が発した音波をマイクで観測し，その音波を増幅し，時間の遅れなくスピーカーから発する。ただし，$\mathrm{D_2}$に取り付けられたマイクとスピーカーは十分小さく，マイクとスピーカーの間の距離は無視できるものとする。

(a)　図5のように，$\mathrm{D_1}$が点Pに到達したとき$\mathrm{D_2}$は点Qにあった。直線OPとx軸とがなす角度はθであり，直線OQとx軸とがなす角度もθである。点Pと点Oとの距離はℓ_1とする。$\mathrm{D_1}$が点Pで発した音波を$\mathrm{D_2}$が観測したとき，$\mathrm{D_2}$は点Q$'$に達していた。直線OQ$'$とx軸とがなす角度をθ'としたときの$\tan\theta'$を，ℓ_1，θ，V，v_1，v_2の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　$\mathrm{D_2}$が点Q$'$にいるときに$\mathrm{D_2}$のスピーカーから発せられた音波を点Oで観測したときの振動数f_{Q}を，θ'，f_{s}，v_1，v_2，Vを用いて表せ。

(c)　$\mathrm{D_1}$は点Pで静止しており$(v_1 = 0)$，$\mathrm{D_2}$のみ速さv_2で移動させたときに，点Oでは$\mathrm{D_1}$からと$\mathrm{D_2}$からの音波によってうなりが観測された。$\mathrm{D_2}$が点Q$'$にいるときに発した音波によるうなりの回数が1秒あたりN回であるとき，v_2を，f_{s}，V，Nを用いて表せ。ただし，$\theta' = \dfrac{\pi}{3}$とする。

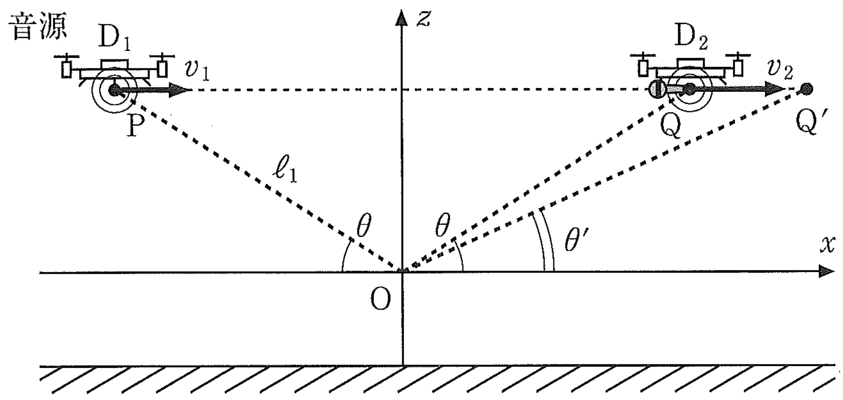

図5