第　1　問

座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

(1) a，b，c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

第　2　問

以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

(1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

第　3　問

座標平面上に 2 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$ をとる。x 軸上の 2 点 P$(p,\ 0)$，Q$(q,\ 0)$ が，次の条件 (i), (ii) をともに満たすとする。

(i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii) 線分 AP の中点を M とするとき，$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{PMQ}$

(1) q を p を用いて表せ。

(2) $q = \dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3) $\triangle \mathrm{OAP}$ の面積を S，$\triangle \mathrm{PMQ}$ の面積を T とする。$S > T$ となる p の範囲を求めよ。

第　4　問

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。