日付（ 2/2 ） セット（② ） 時限（ ３ ）

方式（ 全学統一方式（理系） ）

科 目 名 ： 数学

補足箇所 ： 問 題 ４ページ

図

補足内容 ： 図は参考であり、正確ではない。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。

Ⅰ　x を自然数，p を素数として，x を p で割った商を q，余りを $r\ (0 \leqq r < p)$ とする。

〔1〕　x^2 を r について整理された整式で表すと $x^2 = \boxed{\text{ア}}$ となる。また，n を自然数として，x^n について同様に考えると

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \boxed{\text{イ}}\, r^k$$

と与えられる。ただし，${}_n\mathrm{C}_k$ は n 個の事象から k 個を選び取るときの組合せの数であり，整数の0乗は1とする。これより，x^n を p で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$ を p で割った余りと等しい。さらに，自然数 i，j に対して x^i を p で割った余りを s，x^j を p で割った余りを t とすれば，x^{i+j} を p で割った余りは s と t に関する整式である $\boxed{\text{エ}}$ を p で割った余りに等しい。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ は x，p を用いずに表せ。

〔2〕　31^2 を7で割った余りは $\boxed{\text{オ}}$ であり，31^3 を7で割った余りは $\boxed{\text{カ}}$ となる。同様に考えると，自然数 k について，31^k を7で割った余りが1となるのは，k が $\boxed{\text{キ}}$ の倍数となるときである。一方，31^k を11で割った余りが1となるのは，k が $\boxed{\text{ク}}$ の倍数となるときである。ただし，$\boxed{\text{キ}} > 0$，$\boxed{\text{ク}} > 0$ である。

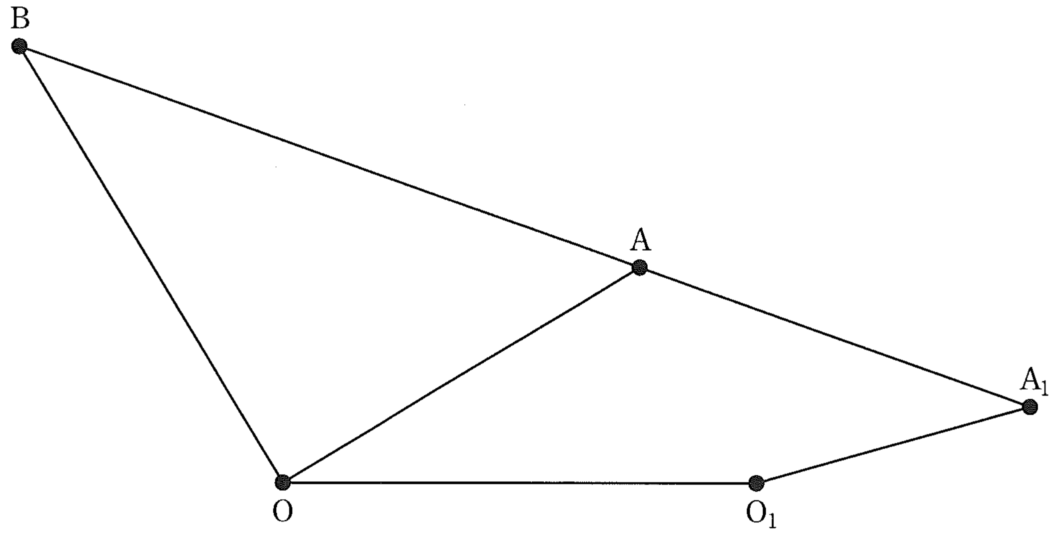
以上より，31^k を7で割った余りと11で割った余りがともに4になる k を具体的に求めることができる。そのような自然数 k で最小のものは $\boxed{\text{ケ}}$ であり，5番目に小さなものは $\boxed{\text{コ}}$ となる。

Ⅱ　図のように，同一直線上にない3点O，A，Bを平面上にとり，△OABを考える。ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = p$，$p < 1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。線分ABを $p^2 : (1 + p^2)$ に外分する点を A_1 とする。さらに，点 O_1 を $\overrightarrow{\mathrm{OO_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} - p^2\vec{a}$ を満たすようにとる。

〔1〕 $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，$\boxed{\text{ア}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，$\boxed{\text{イ}}$ となる。ゆえに，△OABと△$\mathrm{O_1A_1A}$ は相似であり，△$\mathrm{O_1A_1A}$ の面積は△OABの面積の $\boxed{\text{ウ}}$ 倍である。

〔2〕 同様に△$\mathrm{O_1A_1A}$ に対して線分 $\mathrm{A_1A}$ を $p^2 : (1 + p^2)$ に外分する点 A_2 をとり，さらに点 O_2 を $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}} = \overrightarrow{\mathrm{O_1A_2}} - p^2\overrightarrow{\mathrm{O_1A_1}}$ を満たすようにとる。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OO_2}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，$\boxed{\text{エ}}$ となることから，O，O_1，O_2 は同一直線上にあることがわかる。この操作を続けて，$n = 3,\ 4, \ldots$ について△$\mathrm{O}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-2}$ から点 A_n，点 O_n を順に定める。直線ABと直線 $\mathrm{OO_1}$ の交点をDとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{D}}| = \lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{D}}| = 0$ を用いると $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = \boxed{\text{オ}}\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \boxed{\text{カ}}\,|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}|$ が成り立つことが分かる。

〔3〕 $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ とする。このとき，上で定めたDに対して，Oを通るODの垂線を引き，ABとの交点をEとおく。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，$\boxed{\text{キ}}$ となる。ゆえに，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|}$ を p を用いて表すと，$\boxed{\text{ク}}$ となる。



図

III　aを実数の定数として，関数$f(x)$を $f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。

〔1〕 $a = 0$ とする。このとき，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のとき極小値，$x = \boxed{\text{イ}}$ のとき極大値をとり，$\displaystyle\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} f'(x)\,dx = \boxed{\text{ウ}}$ である。

〔2〕 xについての方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつための必要十分条件をaで表すと，$\boxed{\text{エ}}$ である。このとき，導関数 $f'(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最大値をとる。

〔3〕 関数$g(x)$は$f(x)$の原始関数で，かつ$g(x)e^x$はxの多項式であるとする。$\displaystyle g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ が成立するのは，$a = \boxed{\text{カ}}$ のときである。また，xについての方程式 $g(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつための必要十分条件をaで表すと，$\boxed{\text{キ}}$ である。このとき，曲線 $y = f'(x)$ の $y \geqq 0$ の部分とx軸で囲まれる部分の面積をS_1，曲線 $y = g(x)$ の $y \geqq 0$ の部分とx軸で囲まれる部分の面積をS_2とおくと，$\displaystyle\lim_{a \to -\infty} \frac{S_2}{S_1} = \boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

Ⅳ　実数値をとる数列 $\{X_n\}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式により定義する：

$$a_n = \begin{cases} X_1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} - \dfrac{1}{n}(a_{n-1} - X_n) & (n \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

〔1〕 a_2, a_3 を $\{X_n\}$ の項を用いて表すと，$a_2 = \boxed{\text{ア}}$，$a_3 = \boxed{\text{イ}}$ となる。以下，a_n の一般項を求める。そのため，$b_n = na_n$ により数列 $\{b_n\}$ を定めると，$\{b_n\}$ の漸化式 $b_{n+1} = pb_n + qX_{n+1}$ が，$(p,\ q) = \boxed{\text{ウ}}$ に対して成り立つ。これより，a_n の一般項は X_1, $\cdots$, X_n を用いて $\boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。

〔2〕 表と裏の出る確率が等しいコインを投げて表が出たら１点，裏が出たら０点であるゲームを考える。１回目の点数を X_1，２回目の点数を X_2，というように自然数 n に対して，n 回目の点数を X_n と表すことにする。

各 n について，$X_n = 1$ である確率は常に $\boxed{\text{オ}}$ であることより，$a_2 = 1$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ であり，$a_3 = 0$ である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。また，$a_8 \leqq \dfrac{1}{4}$ となる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。n が奇数のとき，$a_n \leqq \dfrac{1}{2}$ である確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

〔3〕 表が出る確率が p であるコインを用いて，〔2〕と同様に $\{X_n\}$ を定める。ただし，$0 \leqq p \leqq 1$ とする。このとき，$a_n = 0$ である確率を p, n を用いて表すと，$\boxed{\text{コ}}$ である。また，２以上の自然数 n を１つ固定したとき，$na_n = 2$ となる確率が最も高くなるのは，$p = \boxed{\text{サ}}$ のときである。