

# 問 題 紙

**1** 関数  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ) に対して、 $y = f(x)$  のグラフを  $C$  とする。

- (1)  $f(x)$  の極値を求めよ。
- (2)  $x$  軸上の点  $P(t, 0)$  から  $C$  にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数  $t$  の値の範囲を求めよ。
- (3) (2) において、 $C$  の 2 つの接点の  $x$  座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。 $\alpha, \beta$  がともに整数であるような組  $(\alpha, \beta)$  をすべて求めよ。

**2**  $c$  を 1 より大きい実数とする。また、 $i$  を虚数単位として、 $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  とおく。複素数  $z$  に対して、

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c, \quad Q(z) = -a^7z^3 + 3a^6z^2 + (c+2)az - c$$

と定める。

- (1) 方程式  $P(z) = 0$  を満たす複素数  $z$  をすべて求め、それらを複素数平面上に図示せよ。
- (2) 方程式  $Q(z) = 0$  を満たす複素数  $z$  のうち実部が最大のものを求めよ。
- (3) 複素数  $z$  についての 2 つの方程式  $P(z) = 0, Q(z) = 0$  が共通解  $\beta$  を持つとする。そのときの  $c$  の値と  $\beta$  を求めよ。

**3** 座標空間の 3 点  $A(3, 1, 3), B(4, 2, 2), C(4, 0, 1)$  の定める平面を  $H$  とする。また、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点  $P$  からなる領域を  $K$  とする。

- (1) 内積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  を求めよ。
- (2) 原点  $O(0, 0, 0)$  から平面  $H$  に下ろした垂線の足を  $Q$  とする。 $\overrightarrow{AQ}$  を  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  で表せ。
- (3) 領域  $K$  上の点  $P$  に対して、線分  $QP$  上の点で  $\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$  ( $r$  は非負の実数) を満たす点  $R$  が存在することを示せ。
- (4) 領域  $K$  において原点  $O$  からの距離が最小となる点  $S$  の座標を求めよ。

**4** 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を  $n$  回行うとき、赤玉を  $k$  回以上取り出す確率を  $f(k)$  とおく。

- (1)  $n \geq 2$  に対して、 $f(1)$  と  $f(2)$  を求めよ。
- (2)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

を示せ。

- (3) 自然数  $k$  に対して、定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$$

を求めよ。

# 数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって  
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ , ( $a, b, c$  は正または0)

2.  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

4.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

5.  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , ( $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ )

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点  $x_1, x_2$  を  $m:n$  に内分する点, および外分する点:  $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ ,  $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

7. 点  $(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離, および点  $(x_1, y_1, z_1)$  と平面  $ax + by + cz + d = 0$  との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. 円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

9. 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角:  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

(複素数)

11. 極形式表示:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , ( $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$ )  
12.  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  に対し,  $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$   
13. ド・モアブルの公式:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  に対し,  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14.  $x^2 + px + q = 0$  の解が  $\alpha$ ,  $\beta$  のとき,  $\alpha + \beta = -p$ ,  $\alpha\beta = q$   
15.  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  の解が  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  のとき,  $\alpha + \beta + \gamma = -p$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ ,  $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16.  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$   
18.  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$   
19.  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$   
20.  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$   
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$   
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$   
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$   
21.  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$   
22.  $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ , ( $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ )

(数列)

23. 初項  $a$ , 公差  $d$ , 項数  $n$  の等差数列の和:  $S_n = \frac{1}{2} n(a + \ell) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$ , ( $\ell = a + (n-1)d$ )  
24. 初項  $a$ , 公比  $r$ , 項数  $n$  の等比数列の和:  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ , ( $r \neq 1$ )  
25.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - a)^3$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起こる確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$