

〔1〕 次の文章を読み、問1～問3に答えよ。(45点)

図1のように鉛直面内でなめらかにつながった固定されたレールの上を、質量 m の小物体が鉛直下向きの重力の作用を受けて転がることなくすべる運動を考える。小物体の大きさおよび空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさは g とする。以下の問いに答えよ。

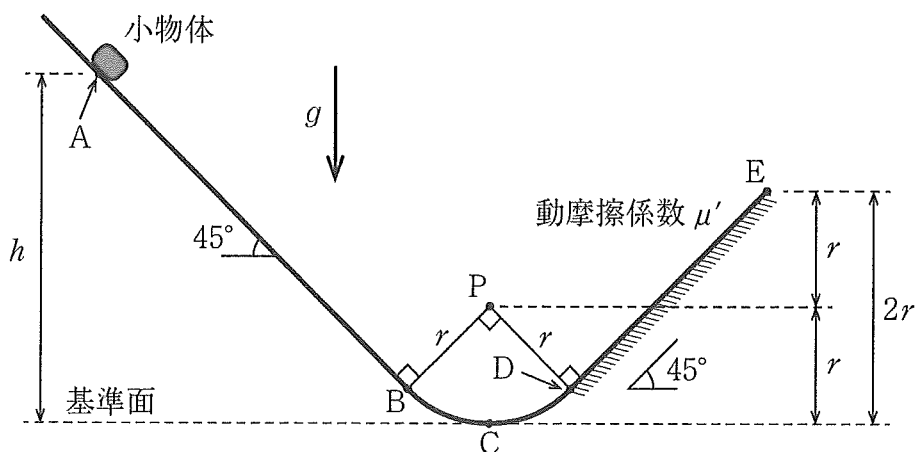


図1

問1. まず、水平の基準面からの高さが h の点 A に小物体を置き、静かに離した。小物体はレール上の直線 AB、曲線 BCD を通過した後、直線 DE 上を進む。曲線 BCD は点 P を中心とする半径 r (ただし、 $2r < h$) の円弧であり、点 E は基準面からの高さが $2r$ の点である。直線 DE には摩擦があり、動摩擦係数は μ' とする。

(1) 小物体が基準面上の点 C を通過するときの速さ v_c 、および垂直抗力の大きさ N_c を m, g, h, r の中から必要なものを用いて表せ。

- (2) 小物体が直線 DE 間を移動する間に受ける動摩擦力による仕事の大きさ W を m, g, h, r, μ' の中から必要なものを用いて表せ。
- (3) 小物体は点 E で速さが 0 (ゼロ) となった。このとき、小物体と直線 DE の動摩擦係数 μ' を h および r を用いて表せ。

問 2. 次に、図 2 のようにレール上の直線 DE の摩擦を取り除いた上で、点 E の先に点 Q を中心とする半径 $\sqrt{2}r$ の円弧である曲線 EF を接続した。また、点 F から飛び出した小物体を図のように“浮き”で受け止めることとした。点 R は基準面上の点で、点 F、点 Q および点 R は一直線上にある。小物体を点 A' (基準面からの高さ H) に置き直し、静かに離した。レールは点 A' から点 F までなめらかにつながれている。以下の文章中の空欄 ① ~ ④ に当てはまる式または数値を求めよ。

曲線 EF 上の点 X について、 $\angle FQX$ の大きさを θ ($0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$) とする。点 X において小物体がレールから受ける垂直抗力の大きさ N_x は m , g , H , r および θ を用いると、 $N_x =$ ① と表される。 N_x が最小値をとるのは、 $\cos \theta =$ ② のときである。したがって、この小物体が点 F までレールから浮き上がらずに到達し、点 F で水平方向に飛び出すために $\frac{H}{r}$ のとるべき範囲は、③ $< \frac{H}{r} \leq$ ④ である。

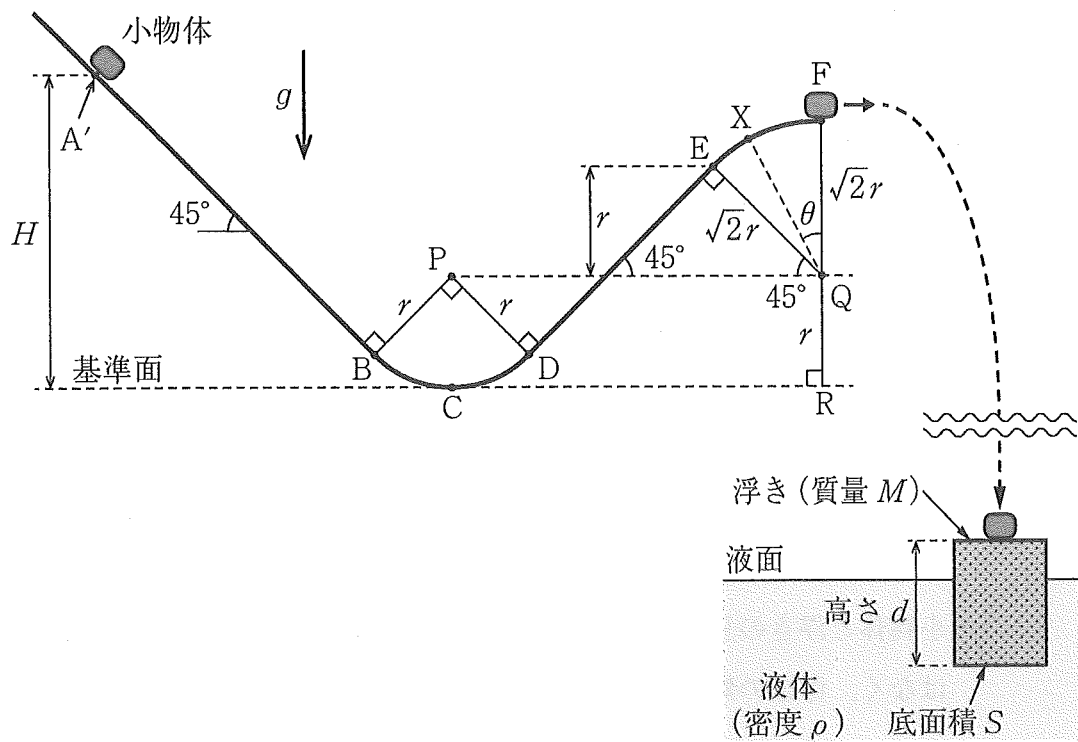


図 2

問 3. 図 3 は、点 F から落下してきた小物体を浮きで受け止めた後の動きを拡大して表した模式図である。小物体は、浮きの上面に完全非弾性衝突(反発係数 $e = 0$)した後、両者は合体し、浮きの上面が位置 O を中心に鉛直方向に上下運動を繰り返している。浮きは、上面と底面の面積 S 、高さ d 、質量 M を持つ直方体で、非吸水性の材料でできており、液体の密度は ρ である。以下では、次のような条件を仮定する。

- ・液体は浮きに比べて体積が十分に大きく、無限に広がっており、液面位置は変わらない。
- ・小物体と浮きを合わせた物体系に作用する力は、液体による浮力と重力のみである。
- ・小物体と浮きの重心は鉛直線上に並んでおり、浮力と重力の作用線にずれはなく、浮きの傾きはない。また、水平方向の運動もない。

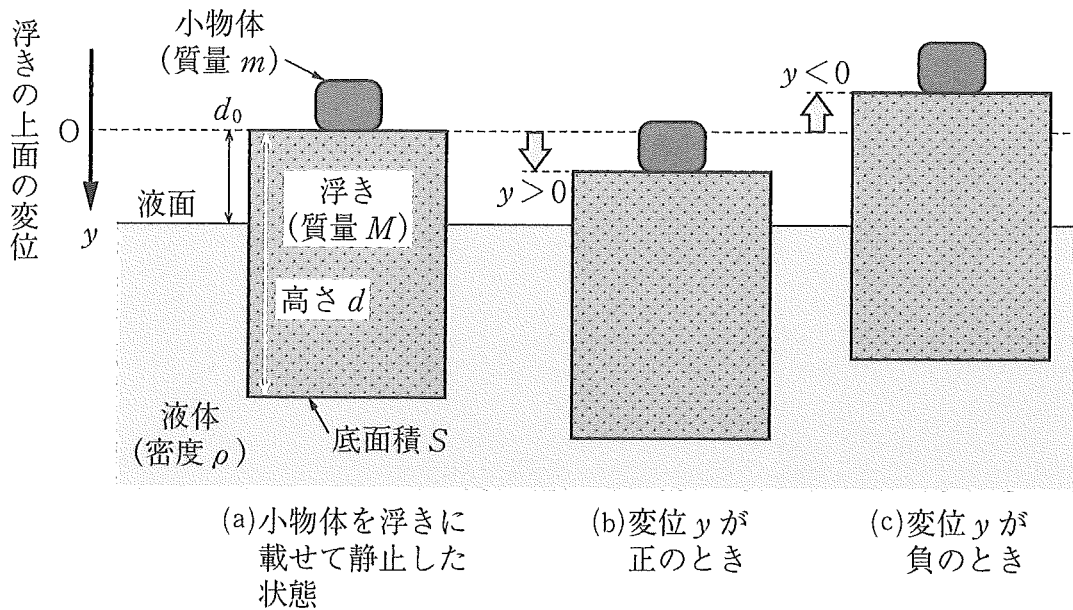


図 3

- (1) 位置 O は、図 3(a)に示すように、小物体を浮きに静かに載せてつり合い状態となったときの浮きの上面の位置と等しいと考えることができる。位置 O から液面までの距離 d_0 を m 、 M 、 d 、 S 、 ρ の中から必要なものを用いて表せ。

- (2) 上下運動により浮きの上面が位置 O を通過するときの速さは、 V であった。浮きの上面の位置が図 3(b)および(c)に示すように位置 O から y だけ変化したときの加速度 a を m, M, S, ρ, g, y の中から必要なものを用いて表せ。ただし、 y および a は鉛直下向きを正とし、浮きの上面は液体中に没することはないものとする。
- (3) 上下運動の周期 T と、振幅 Y を求めよ。解答は、 d, d_0, V, g の中から必要なものを用いて表せ。

〔2〕 次の文章を読み、問1～問3に答えよ。(40点)

問1. 真空中に、図1のような断面積 S で長さ d の N 回巻きのコイル A がある。長さ d はコイル A の直径にくらべて十分長く、導線は密に巻いてあり、コイル A 内の磁場は一様とする。コイル A の抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。なお、真空中の透磁率は μ_0 とする。

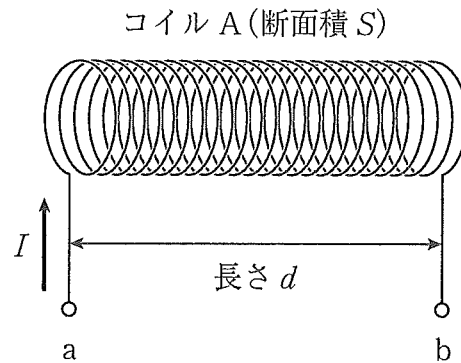


図1

- (1) 時間 Δt の間に、コイル A に流れる電流 I を ΔI だけ増加させたとき、コイル A の内部における磁束の変化 $\Delta\Phi$ を S , d , N , Δt , I , ΔI , μ_0 の中から必要なものを用いて求めよ。
- (2) 時間 Δt の間に、コイル A に流れる電流 I を ΔI だけ増加させたとき、コイル A の両端に発生する誘導起電力 V_L (図1中の点 a に対する点 b の電位) を S , d , N , Δt , I , ΔI , μ_0 の中から必要なものを用いて求めよ。

問 2. 真空中に、図 2 のように、抵抗が無視できるコイル A、抵抗値 R の 3 つの抵抗 A, B, C, 内部抵抗が無視できる起電力 E の電池, およびスイッチで構成される回路がある。この回路について、以下の問いに答えよ。なお、真空中の透磁率は μ_0 とし、真空中でのコイル A の自己インダクタンスを L とする。

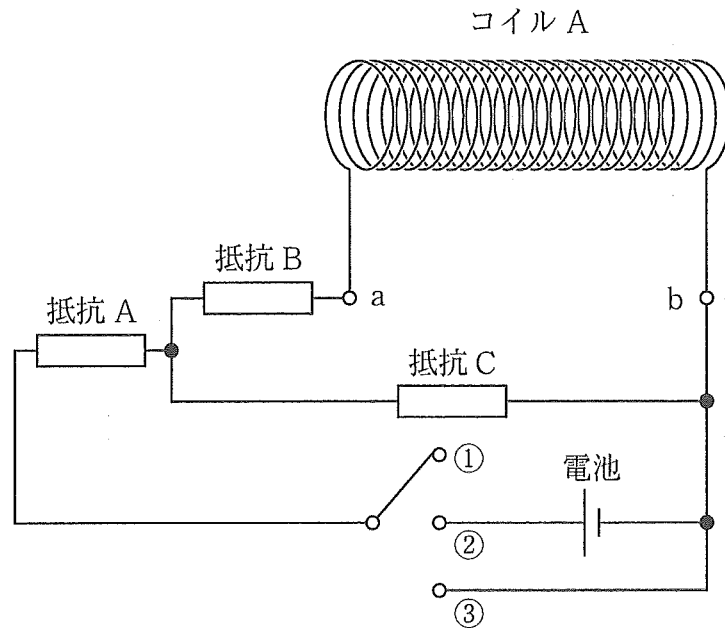


図 2

- (1) 時刻 t_0 でスイッチを接点①から接点②に切り替えた。スイッチを切り替えた直後に、コイル A に流れる電流 I の大きさを求めよ。また、時刻 t_0 におけるコイル A の誘導起電力 V_0 (図 2 の点 a に対する点 b の電位) を R, E, L, μ_0 の中から必要なものを用いて求めよ。
- (2) 十分に時間が経過後の時刻 t_1 においてコイル A に流れる電流 I の大きさ, およびコイル A に蓄えられているエネルギー U_0 をそれぞれ R, E, L, μ_0 の中から必要なものを用いて求めよ。

- (3) 時刻 t_1 より後の時刻 t_2 でスイッチを接点①に戻した。時刻 t_2 におけるコイル A の誘導起電力 V_2 (図 2 の点 a に対する点 b の電位) を R, E, L, μ_0 の中から必要なものを用いて求めよ。また、コイル A の誘導起電力 V_L の時間変化を示すグラフとして適切なものを、図 3 の(a)~(d)の中から選択して記号で答えよ。

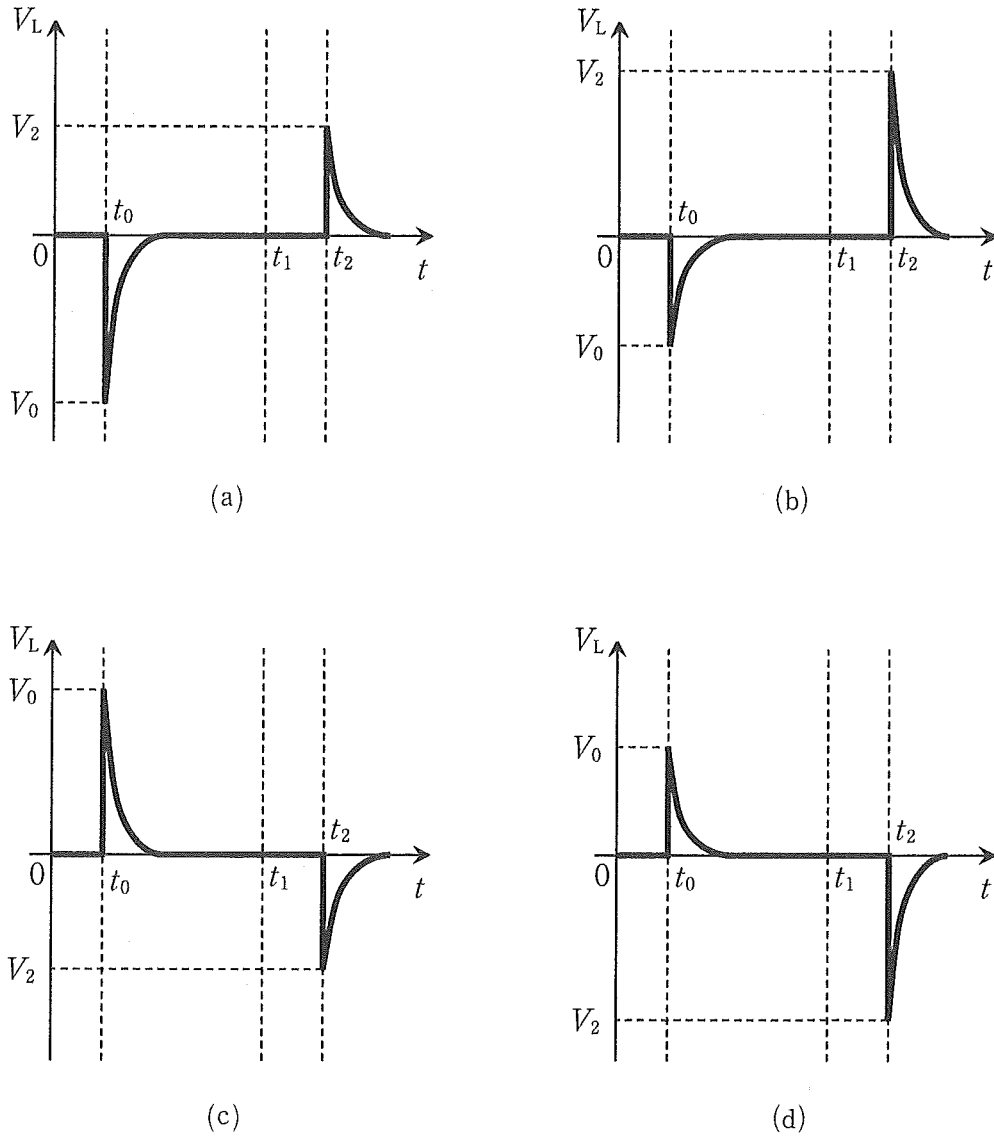


図 3

(4) スイッチを再び接点②に切り替えて十分に時間が経過した後、図4のようにコイルAの内部に透磁率 μ_1 の円柱状の金属の棒をゆっくりと挿入した。ここで、棒の透磁率 μ_1 は真空中の透磁率 μ_0 より大きく、棒の断面積はコイルAの断面積 S と等しいとする。棒を挿入すると、コイルAの自己インダクタンスが変化する。変化した後の自己インダクタンス L_1 を L 、 μ_0 、 μ_1 の中から必要なものを用いて求めよ。

また、棒を挿入すると、コイルAに蓄えられているエネルギーが変化する。棒を挿入してから十分に時間が経過した後のエネルギーを U_1 として、問2の(2)の U_0 からの変化量 $\Delta U = U_1 - U_0$ を、 R 、 E 、 L 、 μ_0 、 μ_1 の中から必要なものを用いて求めよ。また、変化する理由を100字程度で答えよ。(解答欄：120マス。英数字、句読点も1字として数える。)

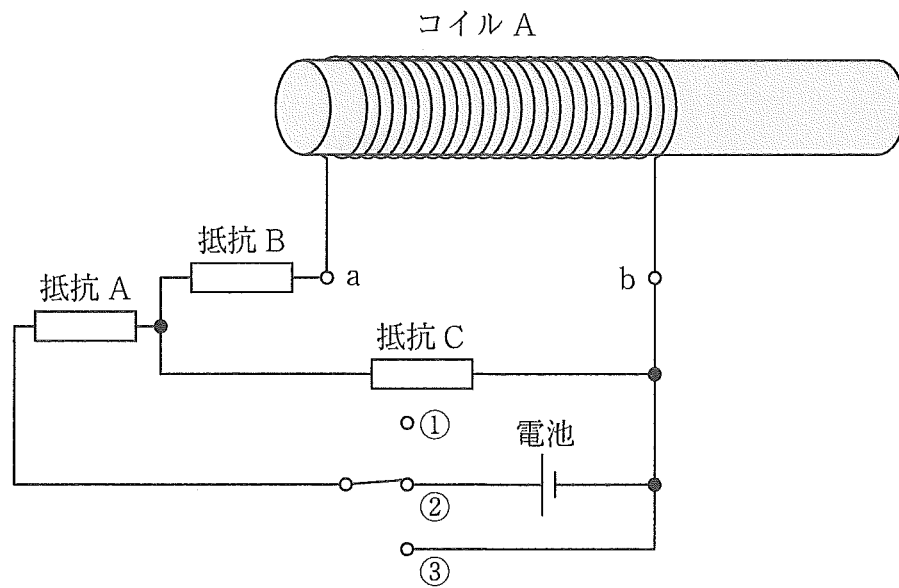


図4

問 3. 図 4 の回路のスイッチを接点②から接点①に切り替えた後、図 5 のようにコイル A のとりにコイル B を巻いた。コイル A と B の相互インダクタンスを M とし、コイル B の抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

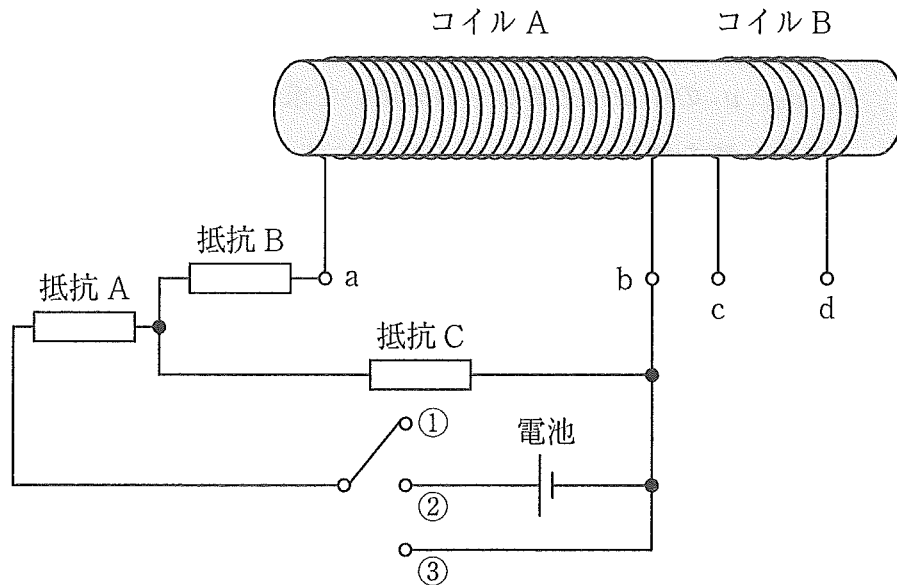


図 5

- (1) スイッチを接点①から接点②に切り替えた。その直後に、コイル B に発生する誘導起電力 (図 5 の点 c に対する点 d の電位) を E , L_1 , M , μ_0 , μ_1 の中から必要なものを用いて求めよ。
- (2) スイッチを接点②に切り替えてから十分に時間が経過後、スイッチを接点①に切り替えた。その直後に、コイル B に発生する誘導起電力を E , L_1 , M , μ_0 , μ_1 の中から必要なものを用いて求めよ。
- (3) 再度、スイッチを接点①から接点②に切り替えてから十分に時間が経過後、スイッチを接点③に切り替えると、コイル A に蓄えられていたエネルギーは 3 つの抵抗 A, B, C によりジュール熱として失われる。スイッチを接点③に切り替えてからコイル A に流れる電流が 0 となるまでに、抵抗 A, B, C で発生するジュール熱の合計を R , E , L_1 , μ_0 , μ_1 の中から必要なものを用いて求めよ。

〔3〕 次の文章を読み、問1～問2に答えよ。(40点)

問1. 振動数 f_0 [Hz]の音波を発生する音源と、一定の速さ w [m/s]で動くことができる台車が、一直線上に置かれている。台車には、音波の受信器あるいは反射板を音源と同じ高さに取り付けることができる。音速を V [m/s]とし、 $V > w$ とする。

(1) 図1に示すように受信器を台車に取り付け、台車が音源に近づく際に観測される音波の振動数を測定する。時刻 t_0 において音源と受信器の距離が L_0 [m]であったとする。ここで時刻 t_0 から時間 t [s]経過後に受信器に到達する音波の振動数について考える。以下の ～ を V , w , L_0 , f_0 , t の中から必要なものを用いた数式で埋めて、説明文を完成させよ。ただし、 $L_0 > wt$ とする。

受信器は速さ w で動いているので、時刻 t_0 から時間 t 経過した際の音源と受信器の距離は [m]となる。一方、時刻 t_0 で受信器に到達した音波の波面は時間 t 経過後に、音源から距離 [m]に到達する。また、受信器に到達した際の音波の波長は [m]である。したがって、時間 t の間に受信器に到達する波の数は $\times t$ 個である。すなわち、受信器で測定される音波の振動数 f_1 は [Hz]である。

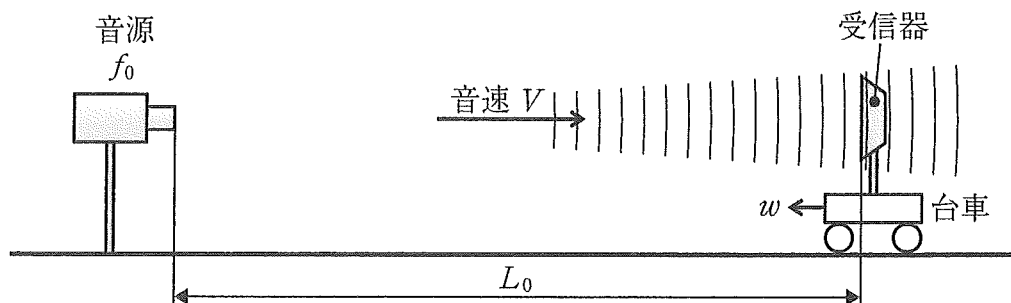


図1

(2) 次に、図2に示すように反射板を台車に取り付け、受信器は音源と反射板を結ぶ直線上のある位置に固定して、速さ w [m/s] で近づいてくる反射板で反射された音波(反射波)の振動数を測定する。ある時刻 t_1 において反射板と受信器の距離が L_1 [m] であったとする。以下の オ ~ ケ を V, w, L_1, f_0, f_1 の中から必要なものを用いた数式で埋めて、説明文を完成させよ。ただし、反射板で反射される際に音波の速さおよび振動数は変化しないものとする。

時刻 t_1 において反射された音波が、受信器に到達するまでにかかる時間は $\Delta t =$ オ [s] である。一方、 Δt [s] 後に反射板は距離 カ [m] 移動する。したがって、反射板と受信器の間に存在する反射波の波長は、反射波の振動数 f_1 [Hz] を用いて キ [m] と表される。これにより、受信器で測定される反射波の振動数 f_2 は f_1 を用いて ク [Hz] と表される。ここで f_1 に エ [Hz] の振動数を代入すると、 f_2 は f_0 を用いて ケ [Hz] と表される。

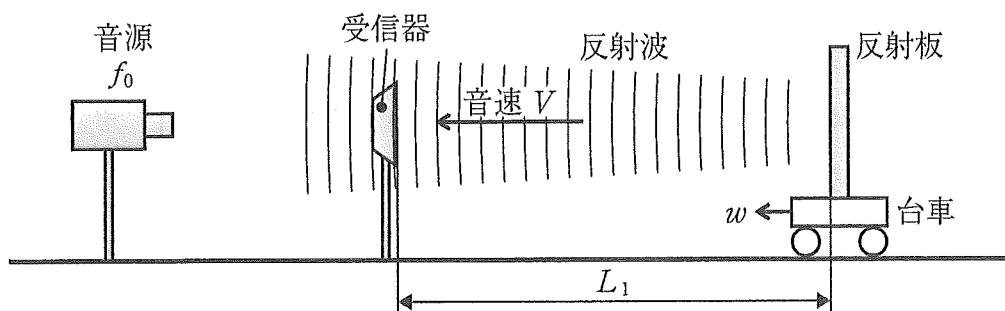


図2

問 2. 音波はさまざまな計測に利用されている。その 1 つに超音波流速計がある。

これは、送受信器で発生させた超音波を流体中に角度をつけて入射し、その応答を観測することで流体の速さを計測する装置である。以下では、流体中の超音波の速さを V_L [m/s]、振動数を F_0 [Hz] とし、超音波は送受信器から流体に直接入射され、管内の流れは送受信器の設置により影響を受けないものとする。なお、以下の問いで必要なら次の近似式を用いよ。

$$\frac{1}{1 \pm x} \doteq 1 \mp x, \quad \frac{x}{1 \pm x} \doteq x \quad (\text{複号同順。ただし } |x| \ll 1)$$

- (1) 図 3 に示すように、流体がまっすぐな管の中を一様に速さ u [m/s] で流れている。このとき、流体の速さ u は、距離 L [m] 離れた 2 つの送受信器より入射角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) で発射された超音波が、対となる送受信器に到達するまでの時間の差から求めることができる。以下の ~ を V_L , u , F_0 , L , θ の中から必要なものを用いた数式で埋めて、説明文を完成させよ。なお、 V_L は u に比べて十分大きい ($V_L \gg u$) ものとする。

送受信器 1 から発射された超音波が送受信器 2 に到達する際にかかる時間 $\Delta t_{1 \rightarrow 2}$ は、 [s] となる。一方、送受信器 2 から発射された超音波が送受信器 1 に到達する際にかかる時間 $\Delta t_{2 \rightarrow 1}$ は [s] となる。したがって、それぞれの経路でかかる時間の差を $\Delta t_d = \Delta t_{1 \rightarrow 2} - \Delta t_{2 \rightarrow 1}$ とすれば、流体の速さは近似的に $u \doteq$ $\times |\Delta t_d|$ として与えられる。

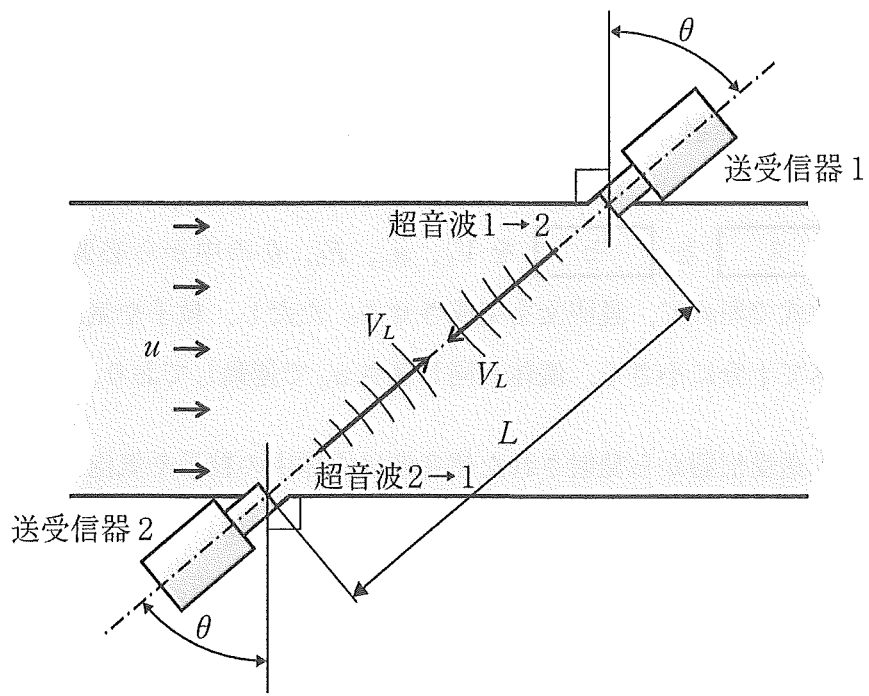


图 3

- (2) 図4に示すように、粒子や気泡を含む流体がまっすぐな管の中を一様に速さ u_p [m/s] で流れている。このとき、送受信器より入射角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) で発射された超音波は粒子や気泡で反射されるため、流体の速さは反射波ともとの超音波の振動数の差から求めることができる。以下の と を V_L , u_p , F_0 , θ の中から必要なものを用いた数式で埋めて、説明文を完成させよ。ただし、粒子や気泡は管の直径に比べて十分に小さく、流体と同じ速さ u_p で運動しており、 $V_L \gg u_p$ とする。

送受信器から発射された超音波は流体中の粒子や気泡に反射され送受信器に返ってくるので、反射波の振動数 F_R [Hz] は問1 で求めた解を参考にすれば $F_R =$ $\times F_0$ となる。したがって、超音波の往復によって生じる振動数の差を $\Delta F = F_R - F_0$ とすれば、 u_p は近似的に $u_p \doteq$ $\times |\Delta F|$ として与えられる。

- (3) 一般に超音波流速計の時間や振動数の測定精度には限界がある。(1), (2)の結果を参考にすると、流体の速さの測定精度を向上させるためには、送受信器を設置する際に超音波の入射角をどのようにすればよいか、理由も含めて答えなさい。

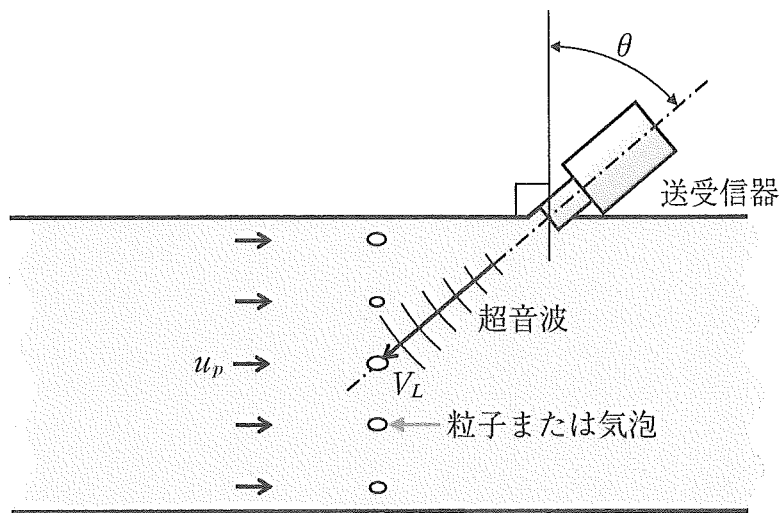


図 4