

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

(1)

次の文章中の \square に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた \square の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

(1) 等式 $\frac{6x}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{x+B}{x^2+Cx+4}$ が恒等式となるように定数 A, B, C の値を定めると、
 $A = \square{\text{ア}}, B = \square{\text{イ}}, C = \square{\text{ウ}}$ である。

(2) 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す。

(i) 取り出した 4 枚のカードに書かれた数字がすべて 7 以下である確率は $\square{\text{エ}}$ である。

(ii) 取り出した 4 枚のカードの中に 8 と書かれたカードがある確率は $\square{\text{オ}}$ である。

(iii) 取り出した 4 枚のカードに書かれた数字の和が 12 以下である確率は $\square{\text{カ}}$ である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で、 $a_3 = 1, a_8 = 3$ であるとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ の公差は $\square{\text{キ}}$ であり、一般項 a_n を n の式で表すと $a_n = \square{\text{ク}}$ である。また、初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表すと $\sum_{k=1}^n a_k = \square{\text{ケ}}$ であり、 $S_n = \sum_{k=1}^n ka_k$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \square{\text{コ}}$ である。

(2)

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

(1) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ であるから、 $\sin \frac{\pi}{12} = \text{ア}$ 、 $\cos \frac{\pi}{12} = \text{イ}$ である。

$\tan \theta \sin 2\theta$ を $\cos 2\theta$ の式で表すと $\tan \theta \sin 2\theta = \text{ウ}$ であり、 $\theta = \frac{\pi}{24}$ とおけば $\tan \frac{\pi}{24} = \text{エ}$ である。また、半径 1 の円に外接する正二十四角形の面積は オ である。

(2) $\cos \theta = x$ とおく。

(i) $\cos 3\theta$ を x の式で表すと $\cos 3\theta = \text{カ}$ である。

また、 $\sin 3\theta$ を x の式と $\sin \theta$ の積で表すと $\sin 3\theta = \left(\text{キ} \right) \sin \theta$ である。

$\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき、 $\cos 3\theta = \cos(2\pi - 2\theta)$ であることから $\cos \frac{2}{5}\pi = \text{ク}$ である。

(ii) $\cos 5\theta$ を x の式で表すと $\cos 5\theta = \text{ケ}$ であり、 $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \text{コ}$ である。

(3)

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

座標空間内に 5 点 O, A, B, C, D があり, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき,

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

であるとする。

- (1) $|\overrightarrow{AB}| =$ ア $,$ $|\overrightarrow{AD}| =$ イ $,$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ ウ であり, 三角形 ABD の面積は エ である。
- (2) 点 D から直線 AB に下ろした垂線を DE とする。 \overrightarrow{OE} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表すと $\overrightarrow{OE} =$ オ である。よって点 E は線分 AB を 1 : カ の比に内分する。
- (3) 3 点 A, B, D の定める平面に点 O から下ろした垂線を OF とする。 $\overrightarrow{AF} =$ キ $\overrightarrow{AB} +$ ク \overrightarrow{AD} であるから, $|\overrightarrow{OF}| =$ ケ である。また, 四面体 OABD の体積は コ である。

(4)

$0 < x < 1$ において, $f(x) = x \log x$, $g(x) = f(1-x) = (1-x) \log(1-x)$, $h(x) = f(x) + g(x)$ を考える. また, $\alpha = \log 2$, $\beta = \log 3$ とおく. 次の問いに答えよ. ただし, 「 α, β で表せ」という場合, α と β のうち片方だけで表せることもありうる.

(1) $h\left(\frac{1}{3}\right)$ の値を α, β で表せ. また, $h(x) - h(1-x)$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ. また, $g'(x) = a f'(1-x)$ となるような定数 a の値を求めよ.

(3) $h(x)$ の極値を α, β で表せ.

(4) $\int f(x) dx = F(x) + C_1$ (C_1 は積分定数) となるような関数 $F(x)$ を 1 つ求めよ.

また, $\int g(x) dx = bF(1-x) + C_2$ (C_2 は積分定数) となるような定数 b の値を求めよ.

(5) 曲線 $y = h(x)$ と直線 $y = h\left(\frac{1}{3}\right)$ で囲まれた部分の面積を α, β で表せ.