[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（1） 座標平面の3点O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$，B$(1,\ \sqrt{3})$を頂点とする三角形OABの外心の座標は$\left(\boxed{\text{（あ）}},\ \boxed{\text{（い）}}\right)$であり，内心の座標は$\left(\boxed{\text{（う）}},\ \boxed{\text{（え）}}\right)$である。

（2） 座標平面の第1象限の点$(X,\ Y)$において楕円$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$と接する直線を$\ell$とすると，$\ell$の傾きは$\boxed{\text{（お）}}$である。また，原点をO，$\ell$と$x$軸，$y$軸との交点をそれぞれP，Qとすると，三角形OPQの面積は$(X,\ Y)=\left(\boxed{\text{（か）}},\ \boxed{\text{（き）}}\right)$のときに最小値$\boxed{\text{（く）}}$をとる。

（3） 関数$y=\cos x\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$の最大値は$\boxed{\text{（け）}}$である。また，この関数のグラフと$x$軸で囲まれてできる図形の面積は$\boxed{\text{（こ）}}$である。

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させなさい。

袋が 2 つ（袋 1 と袋 2 ）および赤玉 2 個，白玉 4 個が用意されている。それぞれの袋に玉が 3 個ずつ入った状態として，次の 3 つがあり得る。

状態 A： 袋 1 に入っている赤玉が 0 個である状態

状態 B： 袋 1 に入っている赤玉が 1 個である状態

状態 C： 袋 1 に入っている赤玉が 2 個である状態

上記の各状態に対して，次の 2 段階からなる操作 T を考える。

操作 T

袋 1 から玉を 1 個無作為に取り出し，それを袋 2 に入れる。次に，袋 2 から玉を 1 個無作為に取り出し，それを袋 1 に入れる。

（1） X，Y をそれぞれ A，B，C のいずれかとする。状態 X に対し操作 T を 1 回施した結果，状態 Y になる確率を $P(X \to Y)$ で表す。このとき

$$P(A \to A) = \boxed{\text{（あ）}},\quad P(A \to B) = \boxed{\text{（い）}},\quad P(B \to A) = \boxed{\text{（う）}},$$
$$P(B \to B) = \boxed{\text{（え）}},\quad P(C \to A) = \boxed{\text{（お）}},\quad P(C \to B) = \boxed{\text{（か）}}$$

である。

（2） 以下，n を自然数とし，状態 B から始めて操作 T を繰り返し施す。操作 T を n 回施し終えたとき，状態 A である確率を a_n，状態 B である確率を b_n，状態 C である確率を c_n とする。$n \geqq 2$ とするとき，a_n，b_n と a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1} の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} a_n = \boxed{\text{（あ）}}\, a_{n-1} + \boxed{\text{（う）}}\, b_{n-1} + \boxed{\text{（お）}}\, c_{n-1} \\ b_n = \boxed{\text{（い）}}\, a_{n-1} + \boxed{\text{（え）}}\, b_{n-1} + \boxed{\text{（か）}}\, c_{n-1} \end{cases}$$

したがって b_n と b_{n-1} の間には次の関係式が成り立つことがわかる。

$$b_n = \boxed{\text{（き）}}\, b_{n-1} + \boxed{\text{（く）}}$$

これより $n \geqq 1$ に対して b_n を n の式で表すと

$$b_n = \boxed{\text{（け）}} + \boxed{\text{（こ）}} \left(\boxed{\text{（さ）}} \right)^n$$

となる。さらに $d_n = \dfrac{a_n}{\left(\boxed{\text{（あ）}} \right)^n}$ とおくとき，d_n を n の式で表すと

$$d_n = \boxed{\text{（し）}} \left\{ \left(\boxed{\text{（す）}} \right)^n - \left(\boxed{\text{（せ）}} \right)^n \right\}$$

となる。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(2)に答えなさい。

-1, 0, 1 以外のすべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x)=\frac{1}{3x(x^2-1)}$$

を考える。

(1) $f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{(あ)}}$ において極小値 $\boxed{\text{(い)}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{(う)}}$ において極大値 $\boxed{\text{(え)}}$ をとる。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の概形を描きなさい。

(3) 直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ とちょうど4点で交わるとき，定数 m の値の範囲は $\boxed{\text{(お)}}$ である。

(4) $a=$ $\boxed{\text{(か)}}$，$b=$ $\boxed{\text{(き)}}$，$c=$ $\boxed{\text{(く)}}$ とすると，次の恒等式が成り立つ。

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$

(5) 直線 $y=mx$ (ただし $m>0$) が曲線 $y=f(x)$ と第1象限において交わる点Pの x 座標を $x(m)$ とし，

$$A(m)=\lim_{T\to\infty}\int_{x(m)}^{T} f(x)\,dx$$

とおいて，$A(m)$ を m の式で表すと，$A(m)=$ $\boxed{\text{(け)}}$ となる。また，原点をO，$(x(m),\ 0)$ を座標とする点をQとし，三角形OPQの面積を $B(m)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}=$ $\boxed{\text{(こ)}}$ となる。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数，式，または記号を入れて文章を完成させなさい。ただし空欄（さ），（し），（す）には選択肢より適切な記号を選んで記入すること。

座標空間の 4 点 O(0, 0, 0)，A(−3, −1, 1)，B(2, −2, 2)，C(3, 3, 3) を頂点とする四面体 OABC の，平面 $z=t$ による切り口を S_t とする。

（1） S_t は $1<t<2$ のとき四角形となり，$t=1$ および $t=2$ のとき三角形となる。$1<t<2$ に対して，以下の条件を満たすように S_t の 4 つの頂点を W，X，Y，Z と定める。

条件： t を 1 に限りなく近づけるとき W と X が限りなく近づき，t を 2 に限りなく近づけるとき W と Y が限りなく近づく。

このとき W，X，Y，Z の座標は

$$\mathrm{W}\left(\boxed{（あ）},\ \boxed{（い）},\ t\right),\quad \mathrm{X}\left(\boxed{（う）},\ \boxed{（え）},\ t\right),$$
$$\mathrm{Y}\left(\boxed{（お）},\ \boxed{（か）},\ t\right),\quad \mathrm{Z}\left(\boxed{（き）},\ \boxed{（く）},\ t\right)$$

となる。

（2） $1\leqq t\leqq 2$ のとき，S_t の面積を $A(t)$ とすると，$A(t)=\boxed{（け）}$ である。これより四面体 OABC の体積 V を求めると $V=\boxed{（こ）}$ となる。

（3） 点 D(6, 2, 4) を追加すると，5 点 O，A，B，C，D は 6 つの三角形 OAB，OBC，OAC，$\boxed{（さ）}$，$\boxed{（し）}$，$\boxed{（す）}$ を面とする六面体の頂点である。3 点 A, B, C を通る平面 α と線分 OD との交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つように u, v を定めると $u=\boxed{（せ）}$，$v=\boxed{（そ）}$ である。したがって $u+v>1$ となるので，点 E はこの六面体の外にある。

選択肢	ABC，ABD，ACD，BCD，OAD，OBD，OCD

（4） $1<t<2$ に対して，（3）の六面体を平面 $z=t$ で切った切り口の面積を $U(t)$ とすると，$U(t)$ は $t=\boxed{（た）}$（ただし $1<\boxed{（た）}<2$）において最大値 $\boxed{（ち）}$ をとる。