注　意　問題1，2，3，4，5の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ネ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1） 2024の約数の中で1番大きいものは2024だが，6番目に大きいものは $\boxed{\text{（ア）}}$ である。2024の6乗根に最も近い自然数は $\boxed{\text{（イ）}}$ である。

（2） 関数 $f(x)$ は実数全体で定義されており，$x \leqq 2$ において

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x \leqq f(x) \leqq 2-x$$

を満たしているものとする。数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1}=a_n+f(a_n)$$

を満たしているものとする。

（i） $a_1 \leqq 2$ ならば，すべての自然数 n に対して $a_1 \leqq a_n \leqq 2$ となることを証明しなさい。

（ii） $a_1 \leqq 2$ ならば，a_1 の値によらず $\lim_{n\to\infty} a_n=2$ となることを証明しなさい。

2

3つのタイプのコインがある。タイプⅠは，両面にHが書かれている。タイプⅡは，両面にTが書かれている。タイプⅢは，片面にH，もう片面にTが書かれている。袋の中にタイプⅠのコインが1枚，タイプⅡのコインが2枚，タイプⅢのコインが3枚入っている。袋の中からコインを1枚取り出す。

(1) 取り出したコインを投げたとき，Hが出る確率は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である。

(2) 取り出したコインを投げてHが出たという条件の下で，そのコインがタイプⅢである条件付き確率は $\boxed{\text{(エ)}}$ である。

(3) 取り出したコインを2回投げたときに2回ともTが出たという条件の下で，そのコインがタイプⅡである条件付き確率は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。

(4) 取り出したコインを2回投げたとき，その結果からコインのタイプが分かる確率は $\boxed{\text{(カ)}}$ である。

(5) n を2以上の自然数とする。取り出したコインを n 回投げたとき，その結果からコインのタイプが分からない確率は $\boxed{\text{(キ)}}$ である。

3

連続関数 $f(x)$ は $f(x)>0$ を満たし，$1 \leqq x \leqq 3$ で単調に減少するものとする。a を実数とし，S を

$$S=\int_1^3 |f(x)-ax|\,dx$$

と定める。

(1) $I=\int_1^3 f(x)\,dx$ と定める。I と a を用いて S を表すと，$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$ のとき $S=\boxed{\text{(ク)}}$ となり，$a \geqq f(1)$ のとき $S=-\boxed{\text{(ク)}}$ となる。

(2) a が $\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ を満たしているとき，$1<x<3$ の範囲で方程式 $f(x)-ax=0$ は解をただ1つ持つことを証明しなさい。

(3) a は $\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ を満たしているとする。$1<x<3$ の範囲にある方程式 $f(x)-ax=0$ の解を $x=t$ とおく。このとき，a を関数 $f(x)$ と実数 t を用いて表すと $a=\boxed{\text{(ケ)}}$ となる。また，関数 $F(x)=\int_1^x f(s)\,ds$ と，t に関する分数式 $q(t)=\boxed{\text{(コ)}}$ を用いて，$S=2F(t)-F(3)+q(t)f(t)$ と表される。

(4) $F(x)$ を (3) で定めた関数，t_0 を $1<t_0<3$ を満たす実数とする。$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し $F(x)-F(t_0) \geqq (x-t_0)f(x)$ が成り立つことを証明しなさい。

(5) $p(x)$ を $1 \leqq x \leqq 3$ で $p''(x)>0$ を満たす分数関数とし，t_0 を $1<t_0<3$ を満たす実数とする。$p(t_0)=0$ かつ $p'(t_0)=\boxed{\text{(サ)}}$ ならば，$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し $2(x-t_0)f(x)+p(x)f(x) \geqq 0$ が成り立つ。

(6) $a=\boxed{\text{(シ)}}$ のときに，S は最小になる。

4

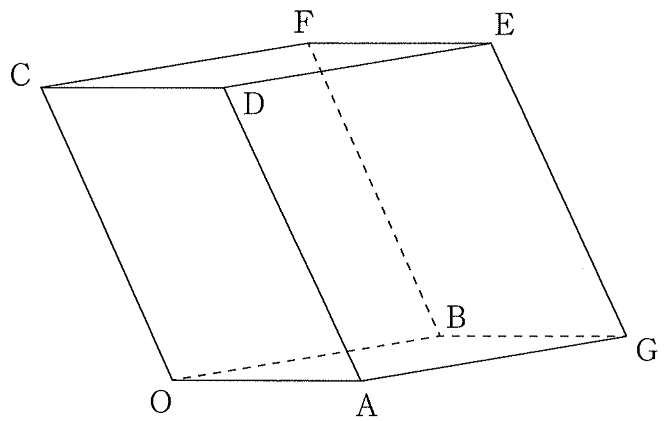
平行六面体 OAGB−CDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ とする。

(1)　三角形 OAB の面積は $\boxed{\text{（ス）}}$ である。頂点 C から 3 点 O, A, B を通る平面に垂線を下ろし，この平面との交点を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\boxed{\text{（セ）}}\,\vec{a}+\boxed{\text{（ソ）}}\,\vec{b}-\vec{c}$ である。四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{（タ）}}$ である。

辺 OA を $t:1-t$ に内分する点を I，辺 OB の中点を J，辺 BF の中点を K とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{JI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}}=\boxed{\text{（チ）}}$ であり，三角形 IJK の面積は $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

(3)　3 点 I，J，K を通る平面が辺 DE と共有点を持つのは，$\boxed{\text{（テ）}}\leqq t<1$ のときである。



5

複素数平面上で，原点Oを中心とする半径1の円 C_1，および C_1 に内接する半径 $r\ (0<r<1)$ の円 C_2 を考える。C_2 上に点Pを固定し，Pの位置を表す複素数が1になるように C_2 を配置する。時刻 $t=0$ から C_2 を C_1 に沿ってすべることなく回転させる。ただし，C_1 と C_2 の接点は C_1 上を反時計回りに速さ1で移動するものとする。すなわち時刻 $t \geqq 0$ における C_1 と C_2 の接点を表す複素数は $\cos t + i \sin t$ である。

(1)　Pが C_1 上に位置するような時刻 $t>0$ で最小のものは $t=$ $\boxed{\text{（ト）}}$ である。

(2)　時刻 $t \geqq 0$ における C_2 の中心を表す複素数を $w(t)$，Pの位置を表す複素数を $z(t)$ とすると，$w(t)=$ $\boxed{\text{（ナ）}}$，$z(t)=w(t)+$ $\boxed{\text{（ニ）}}$ である。

(3)　時刻0から時刻 $\boxed{\text{（ト）}}$ の間にPが動く道のりは $\boxed{\text{（ヌ）}}$ である。

(4)　時刻0から時刻 $t>0$ の間にPが動く道のりを $l(t)$ とすると，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t}=$ $\boxed{\text{（ネ）}}$ である。