I. 以下の問いに答えなさい。

(i) 式 $3(x+5)^{-\frac{5}{2}}$ の値は，$x = 0$ のとき $\boxed{\quad（ア）\quad}$ であり，$x = 4$ のとき $\boxed{\quad（イ）\quad}$ である。（解答は**指数を含まない形**で表し，根号を含む場合は分母を有理化すること。）

(ii) 等式

$$f(x) = 12x^2 + 6x\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_0^1 tf(t)\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。（答えのみを解答用紙Bの所定の枠内に記入しなさい。）

(iii) $a < b < c$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} = 2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。（答えのみを解答用紙Bの所定の枠内に記入しなさい。）

(iv) ある業者は，三つの工場A, B, Cから廃棄物を回収し，その中に含まれる三つの金属P, Q, Rを取り出して新たな製品Kを作る。各工場の廃棄物から取り出されるP, Q, Rの量は以下の通りである。

- 工場Aの廃棄物10kgからPが3kg, Qが5kg, Rが1kg取り出される。
- 工場Bの廃棄物10kgからPが1kg, Qが3kg, Rが2kg取り出される。
- 工場Cの廃棄物10kgからPが4kg, Qが1kg, Rが1kg取り出される。

また，Pが2kgと，Qが2kgと，Rが1kgで製品Kが1個作られる。工場A, B, Cから合わせて200kgの廃棄物が回収できるとき，製品Kをできるだけ多く作るには，工場Aから $\boxed{\quad（ウ）\quad}$ kg, 工場Bから $\boxed{\quad（エ）\quad}$ kg, 工場Cから $\boxed{\quad（オ）\quad}$ kgの廃棄物を回収すればよく，そのとき製品Kは $\boxed{\quad（カ）\quad}$ 個作ることができる。

II. 以下の問いに答えなさい。

(i) $\sqrt{13}$ を10進法の小数で表したとき小数第3位の数字は $\boxed{(1)}$，小数第4位の数字は $\boxed{(2)}$ である。ただし，必要であれば $(3.606)^2 = 13.003236$ であることを用いてよい。

(ii) ベクトルの列 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \ldots$ を条件

$$\vec{a}_1 = (1, 0), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{a}_{n+2} = \frac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{a}_n}{\left|\vec{a}_n\right|^2}\vec{a}_n$$

で定める。このとき $\vec{a}_9 = \left(\dfrac{\boxed{(3)}}{\boxed{(4)\,(5)\,(6)}}, \boxed{(7)}\right)$ である。また，$\left|\vec{a}_n\right| < 10^{-25}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{(8)\,(9)}$ である。ただし，必要であれば，$\log_{10} 2 = 0.301$ を近似として用いてよい。

(iii) 1から n までの n 個の自然数の最小公倍数を a_n とする。

- $a_n = a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{(10)}$ である。
- $a_{n+1} = 2a_n$ を満たす10000以下の自然数 n は $\boxed{(11)\,(12)}$ 個ある。

(iv) xy 平面上で，不等式 $x \leqq 5$ の表す領域を A，不等式 $x + y \geqq 10$ の表す領域を B とする。また，xy 平面上の点の集合 S は以下の3つの条件をすべて満たす。

(条件1) S に含まれるどの点も，その x 座標と y 座標はともに1以上10以下の自然数である。

(条件2) S の要素で領域 A に含まれるものは，領域 B に含まれる。

(条件3) S の要素で領域 B に含まれるものは，領域 A に含まれる。

S を，条件1～3を満たす中で要素の個数が最大のものとするとき，その要素の個数は $\boxed{(13)\,(14)}$ である。

III. $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18$ とし，放物線 $C : y = f(x)$ と 2 つの直線 $\ell_1 : y = -x$, $\ell_2 : y = x$ を考える。C と ℓ_1 の共有点のうち x 座標が負のものを A とし，C と ℓ_2 の共有点のうち x 座標が正のものを B とする。また，A の x 座標を a, B の x 座標を b とする。

(i) $a = \boxed{(15)\ (16)} - \boxed{(17)\ (18)}\sqrt{\boxed{(19)}}$, $b = \boxed{(20)\ (21)}$ である。

(ii) C と ℓ_2 で囲まれた部分のうち，$x \geqq 0$ の範囲にあるものの面積は

$$\boxed{(22)\ (23)\ (24)\ (25)}$$

である。

以下，P を C 上の点とし，P の x 座標を p とする。また，P における C の接線と y 軸の交点を D とする。

(iii) p が $0 < p < b$ の範囲を動くとき，△ABP の面積が最大になるのは $p = \boxed{(26)\ (27)} - \boxed{(28)}\sqrt{\boxed{(29)}}$ のときである。

(iv) $p = 8$ のとき，D の y 座標は $\boxed{(30)\ (31)}$ である。

(v) p が $0 < p < b$ の範囲を動くとき，△BDP の面積 S が最大になるのは $p = \boxed{(32)\ (33)}$ のときであり，そのときの S は $\boxed{(34)\ (35)\ (36)}$ である。

IV. あるくじ引き店には，くじが10本入っている箱が5箱ある。5箱のうち4箱には当たりくじが1本，はずれくじが9本入っており，この4箱を「通常の箱」と呼ぶ。また，残りの1箱には当たりくじが5本，はずれくじが5本入っており，この箱を「有利な箱」と呼ぶ。通常の箱と有利な箱は見た目が同じであり，見分けることはできない。

(i) まず，Aが店に入り，5箱のうちの1箱を無作為に選び，その箱からくじを1本引いた。Aの選んだ箱が通常の箱であり，かつ，引いたくじがはずれである確率は $\dfrac{\boxed{(37)\,(38)}}{\boxed{(39)\,(40)}}$ である。また，Aの選んだ箱が有利な箱であり，かつ，引いたくじがはずれである確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)\,(43)}}$ である。したがって，Aの引いたくじがはずれであったときに，Aの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)\,(46)}}$ である。

(ii) (i)の後，Aは引いたくじをもとの箱に戻し，よくかき混ぜたあと，同じ箱からもう一度くじを1本引いた。Aの引いたくじが1回目，2回目ともにはずれであったときに，Aの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(47)\,(48)}}{\boxed{(49)\,(50)\,(51)}}$ である。

(iii) (ii)の後，Aは引いたくじをもとの箱に戻して店を出た。その後，BとCが店に入った。Bは5箱のうち1箱を無作為に選び，CはBが選ばなかった4箱の中から1箱を無作為に選んだ。BはAと同じように，自分の選んだ箱からくじを1本引き，それをもとの箱に戻し，よくかき混ぜたあと，同じ箱からもう一度くじを1本引いた。また，Cは自分の選んだ箱からくじを1本引いた。Bの引いたくじが1回目，2回目ともにはずれであり，かつ，Cの引いたくじが当たりであったときに，Bの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(52)\,(53)}}{\boxed{(54)\,(55)\,(56)}}$ であり，Cの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(57)\,(58)\,(59)}}{\boxed{(60)\,(61)\,(62)}}$ である。