

1 自然数  $n$  に対して, 関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

- (1) 方程式  $f_n(x) = 0$  は, ただ 1 つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1) における実数解を  $a_n$  とおくと, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$  を求めよ.

(配点率 20 %)

2  $\alpha, \beta$  を複素数とし, 複素数  $z$  に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく.  $\alpha, \beta$  は

$$|f(1) - 3| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leq 3$$

を満たしながら動く. ただし,  $i$  は虚数単位である.

(1)  $f(1+i)$  がとりうる値の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ.

(2)  $f(1+i) = 0$  であるとき,  $\alpha, \beta$  の値を求めよ.

(配点率 20 %)

3 空間内の 2 直線  $l, m$  はねじれの位置にあるとする.  $l$  と  $m$  の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

(配点率 20 %)

4  $a > 1$  とする.  $xy$  平面において, 点  $(a, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする.

- (1) 円  $C$  の  $x \geq a$  の部分と  $y$  軸および 2 直線  $y = 1$ ,  $y = -1$  で囲まれた図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V_1$  を求めよ.
- (2) 円  $C$  で囲まれた図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を  $V_2$  とする. (1) における  $V_1$  について,  $V_1 = 2V_2$  となる  $a$  の値を求めよ.

(配点率 20 %)

5 自然数  $1, 2, 3, \dots, n$  のうち,  $n$  と互いに素であるものの個数を  $f(n)$  とする.

(1) 自然数  $a, b, c$  および相異なる素数  $p, q, r$  に対して, 等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $f(n)$  が  $n$  の約数となる 5 以上 100 以下の自然数  $n$  をすべて求めよ.

(配点率 20 %)