

[1]

$$(1) \quad f(x) = 8^x - \frac{15}{2} \cdot 4^x + \frac{63}{4} \cdot 2^x - \frac{57}{8}$$

において, $2^x = t$

$$g(t) = t^3 - \frac{15}{2} t^2 + \frac{63}{4} t - \frac{57}{8}$$

とある.

$f(x)$ のとり得る値は, $t > 0$ で $g(t)$ のとり得る値と一致する. ... (*)

また, $t = 2^x$ とするとき, 2^x は単調に増加するので

$f'(x)$ の符号と $g'(t)$ の符号は一致する. ... (**)

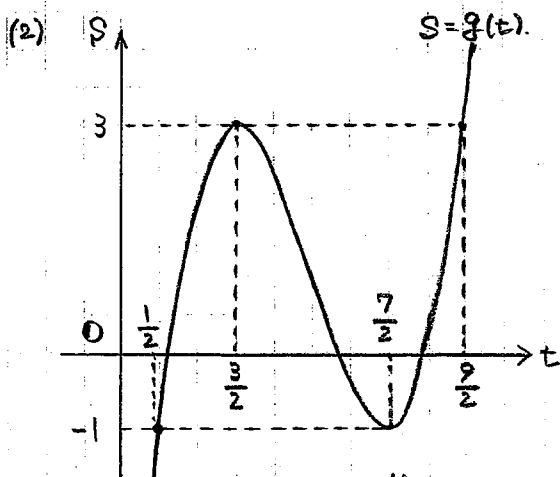
(*)、(**) から, $f(x)$ の極大値 M は $g(t)$ の極大値に, $f(x)$ の極小値 m は $g(t)$ の極小値に一致する.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 15t + \frac{63}{4} \\ &= 3\left(t - \frac{3}{2}\right)\left(t - \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{7}{2}$	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$		↗	3	↘	-1	↗

増減表から

$$M = g\left(\frac{3}{2}\right) = 3, \quad m = g\left(\frac{7}{2}\right) = -1 \quad \dots (\text{答})$$



左の $S = g(t)$ のグラフのようには
 $t = \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$ のとき $S = 3$,
 $t = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ のとき $S = -1$
 である.

(≥) $f'(x) = \frac{d}{dx} g(t) \frac{dt}{dx} = g'(t) \cdot 2^x \log 2$ で $2^x \log 2 > 0$ より (**) がいえる.

[I] (つづき)

$a \leq x \leq b$ より $2^a \leq t \leq 2^b$. (※) から この範囲における $g(t)$ の最大値が 3, 最小値が -1 となる条件を考えればよい.

これは次の場合がある.

(ア) $2^a = \frac{1}{2}$ で最小値をとるとき, このとき $a = -1$.

最大値が 3 となるためには

$$\frac{3}{2} \leq 2^b \leq \frac{9}{2} \quad \text{なので,} \quad \log_2 \frac{3}{2} \leq b \leq \log_2 \frac{9}{2}$$

$$b - a \geq \log_2 \frac{3}{2} - (-1) = \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 2 = \log_2 3.$$

(イ) $2^b = \frac{9}{2}$ で最大値をとるとき, このとき $b = \log_2 \frac{9}{2}$

最小値が -1 となるためには

$$\frac{1}{2} \leq 2^a \leq \frac{7}{2} \quad \text{なので,} \quad \log_2 \frac{1}{2} \leq a \leq \log_2 \frac{7}{2}$$

$$b - a \geq \log_2 \frac{9}{2} - \log_2 \frac{7}{2} = \log_2 \frac{9}{7}$$

(ウ) $\frac{1}{2} \leq 2^a \leq \frac{3}{2}$ かつ $\frac{7}{2} \leq 2^b \leq \frac{9}{2}$ とき.

$$\log_2 \frac{1}{2} \leq a \leq \log_2 \frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad \log_2 \frac{7}{2} \leq b \leq \log_2 \frac{9}{2}$$

$$b - a \geq \log_2 \frac{7}{2} - \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 \frac{7}{3}$$

座か 2 となるので, $\log_2 \frac{9}{7} < \log_2 \frac{7}{3} < \log_2 3$. したがって $b - a$ が最小となるのは (イ) の場合であり,

$$(a, b) = \left(\log_2 \frac{7}{2}, \log_2 \frac{9}{2} \right) \quad \dots (※)$$

[II]

自然数 k, m, n に対して

$$\sqrt{m - \sqrt{n}} + \sqrt{m + \sqrt{n}} - \frac{1}{k}\sqrt{mn} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(1) 自然数解 (m, n) が存在するとき, ①において,

$$\sqrt{m - \sqrt{n}} + \sqrt{m + \sqrt{n}} = \frac{1}{k}\sqrt{mn}$$

ここで, $m - \sqrt{n} \geq 0$ より $n \leq m^2$

このとき, 両辺正なので, 両辺を平方して

$$\begin{aligned} m - \sqrt{n} + 2\sqrt{m^2 - n} + m + \sqrt{n} &= \frac{1}{k^2}mn \\ 2m + 2\sqrt{m^2 - n} &= \frac{1}{k^2}mn \\ 2\sqrt{m^2 - n} &= \frac{1}{k^2}mn - 2m \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

$2\sqrt{m^2 - n} \geq 0$ より,

$$\frac{1}{k^2}mn - 2m \geq 0 \quad \text{よって, } n \geq 2k^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

このとき, ②の両辺は 0 以上より, 両辺を平方して

$$\begin{aligned} 4(m^2 - n) &= \frac{1}{k^4}m^2n^2 - \frac{4m^2n}{k^2} + 4m^2 \\ -4n &= \frac{m^2n^2}{k^4} - \frac{4m^2n}{k^2} \\ -4k^4 &= m^2n - 4k^2m^2 \\ 4k^4 &= (4k^2 - n)m^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

$4k^4 > 0, m^2 > 0$ より

$$4k^2 - n > 0 \quad \text{よって, } n < 4k^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

③, ⑤ より $2k^2 \leq n < 4k^2$ (証明終り)

(2) $2k^2 \leq n < 4k^2$ を満たす自然数 n のうち, $n = 3k^2$ とすると, ④より,

$$4k^4 = k^2m^2 \quad \text{より, } m = 2k$$

したがって, $(m, n) = (2k, 3k^2)$ は ① の自然数解であり, それぞれの k に対して ① の自然数解は少なくとも 1 つ存在する. (証明終り)

① が自然数解 (m, n) をもつとき, $2k^2 \leq n < 4k^2$ である.

④ より,

$$4k^2 - n = \left(\frac{2k^2}{m}\right)^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

[Ⅱ](つづき)

ここで、一般に q を有理数とすると、 q^2 が整数ならば q は整数であるから、 $\frac{2k^2}{m}$ は整数である。よって、 $4k^2 - n$ は平方数である。このとき自然数 l を用いて

$$4k^2 - n = l^2 \quad \text{よって、} n = 4k^2 - l^2 \quad \dots (\text{ア})$$

と表せる。

ここで、(1) より

$$2k^2 \leq 4k^2 - l^2 < 4k^2$$

$$0 < l^2 \leq 2k^2$$

$l > 0$ より

$$0 < l \leq \sqrt{2}k \quad \dots \textcircled{7}$$

このとき⑥より

$$\frac{2k^2}{m} = l \quad \text{よって、} m = \frac{2k^2}{l} \quad \dots (\text{イ})$$

自然数 l に対して、(ア)、(イ) より (m, n) は 1 個定まるので、①の自然数解 (m, n) の個数は⑦を満たす自然数 l の個数以下である。⑦において $\sqrt{2}k$ は整数ではないので、①の自然数解の個数は $\sqrt{2}k$ より小さい。

(証明終り)

(参考)

①の自然数解は、 $(m, n) = (2k, 3k^2)$ の他に、

$$(m, n) = (k^2, 4k^2 - 4), (2k^2, 4k^2 - 1)$$

等も候補としてあがる。

(3) $k = 3$ のとき、④より

$$m = \frac{18}{\sqrt{36 - n}}$$

m は自然数なので、

$$\sqrt{36 - n} = 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

(1) より、 $18 \leq n < 36$ であるから、自然数 n は

$$n = 35, 32, 27$$

このとき、 m はそれぞれ

$$m = 18, 9, 6$$

よって①の自然数解は、

$$(m, n) = (18, 35), (9, 32), (6, 27) \quad \dots (\text{答})$$

[III]

(1) 直線 ℓ の式は,

$$x = 0 \text{ かつ } y + z = 2 \quad \dots \text{①}$$

となる. 平面 ABP のベクトル方程式は

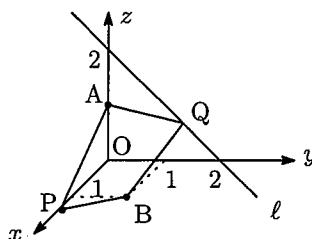
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-as+(1-a)t \\ t \\ s \end{pmatrix} \quad \dots \text{②}$$

① と ② を連立して,

$$\begin{cases} a-as+(1-a)t=0 \\ t+s=2 \end{cases} \iff \begin{cases} s=2-a \\ t=a \end{cases}$$

これを ② に代入して

$$Q(0, a, 2-a) \quad \dots \text{(答)}$$



(2) 直線 AB と直線 PQ の交点を R とおく. 求める条件は, R が線分 AB 上 (端点を除く) かつ R が PQ 上 (端点を除く) であることである. 直線 AB の式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \text{③}$$

直線 PQ の式は

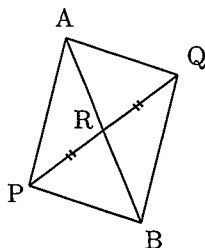
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 2-a \end{pmatrix} \quad \dots \text{④}$$

③ と ④ を連立すると $s = \frac{a}{2}$ かつ $t = \frac{1}{2}$ となる. R が線分 AB 上 (端点を除く) より $0 < \frac{a}{2} < 1$

R は PQ の中点であるから, 線分 PQ 上 (端点を除く) にある. 以上より

$$0 < a < 2 \quad \dots \text{(答)}$$

(3) R は PQ の中点なので, APB の面積を出して 2 倍すればよい.



$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より

[III] (つづき)

$$\begin{aligned}\sqrt{|\vec{AP}|^2 |\vec{AB}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{AB})^2} &= \sqrt{(a^2 + 1)3 - (a + 1)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 2} \quad \dots (\text{答})\end{aligned}$$

(1) の別解

直線 ℓ の式は

$$\ell: y + z = 2$$

平面 ABP の式は

$$x + (a - 1)y + az = a$$

この 2 式を連立して

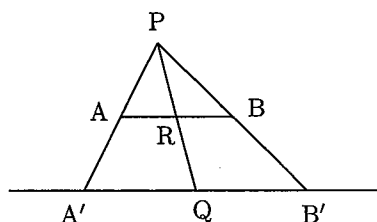
$$Q(0, a, 2 - a) \quad \dots (\text{答})$$

(2) の別解

② に $s = 2 - a, t = a$ を代入して,

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \vec{OP} + (2 - a)\vec{PA} + a\vec{PB}, \\ \vec{PQ} &= (2 - a)\vec{PA} + a\vec{PB} \\ &= 2\vec{PA} + a\vec{AB} \quad \dots \textcircled{5}\end{aligned}$$

特に $a = 0$ のときの式 $\vec{PQ} = 2\vec{PA}$ で定まる Q を A' , $a = 2$ のときの式 $\vec{PQ} = 2\vec{PB}$ で定まる Q を B' とおく (下図).



⑤ より Q は直線 $A'B'$ 上を動くので, 四角形 APBQ ができる必要十分条件は Q が線分 $A'B'$ (端点を除く) にある場合なので,

$$0 < a < 2 \quad \dots (\text{答})$$

(3) の別解 四角形 APBQ の面積は, 対角線に対応するベクトル

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 2 - a \end{pmatrix} \text{ と } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が張る三角形の面積に等しいので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{PQ}|^2 |\vec{AB}|^2 - (\vec{PQ} \cdot \vec{AB})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(3a^2 - 4a + 4)3 - (a - 2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - 8a + 8} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 2} \quad \dots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a(2) = a(2 \cdot 1) = 3a(1) + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7 \\
 & a(3) = a(2 \cdot 1 + 1) = 3a(1) + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8 \\
 & a(4) = a(2 \cdot 2) = 3a(2) + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22 \\
 & a(5) = a(2 \cdot 2 + 1) = 3a(2) + 2 = 3 \times 7 + 2 = 23 \\
 & a(6) = a(2 \cdot 3) = 3a(3) + 1 = 3 \times 8 + 1 = 25 \\
 & a(7) = a(2 \cdot 3 + 1) = 3a(3) + 2 = 3 \times 8 + 2 = 26 \\
 & a(8) = a(2 \cdot 4) = 3a(4) + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67 \\
 & a(9) = a(2 \cdot 4 + 1) = 3a(4) + 2 = 3 \times 22 + 2 = 68 \\
 & \therefore a(7) = 26, \quad a(9) = 68 \qquad \dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad n=1 \text{ のとき, } a(2^1 + 1) = a(3) = 8 = 2 \times 3^1 + 2 \text{ だから, } b_0 = b_1 = 2 \text{ である.} \qquad \dots(\text{答})$$

以下, $n \geq 2$ とする。

$$\begin{aligned}
 a(2^n + 1) &= 3a(2^{n-1}) + 2 \\
 &= 3\{3a(2^{n-2}) + 1\} + 2 \\
 &= 3^2 a(2^{n-2}) + 1 \times 3 + 2 \\
 &= 3^2 \{3a(2^{n-3}) + 1\} + 1 \times 3 + 2 \\
 &= 3^3 a(2^{n-3}) + 1 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2 \\
 &\vdots \\
 &= 3^\ell \{3a(2^{n-1-\ell}) + 1\} + 1 \times 3^{\ell-1} + 1 \times 3^{\ell-2} + \dots + 1 \times 3 + 2 \\
 &\vdots \\
 &= 3^{n-1} a(2) + 1 \times 3^{n-2} + \dots + 1 \times 3 + 2 \\
 &= 3^{n-1} \times (2 \times 3 + 1) + 1 \times 3^{n-2} + \dots + 1 \times 3 + 2 \\
 &= 2 \times 3^n + 1 \times 3^{n-1} + 1 \times 3^{n-2} + \dots + 1 \times 3 + 2
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } n \geq 2 \text{ のとき } \begin{cases} b_n = b_0 = 2 \\ b_{n-1} = b_{n-2} = \dots = b_1 = 1 \end{cases} \text{ である.} \qquad \dots(\text{答})$$

(3) 任意の自然数 n に対して,

$$T_n = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a(k) = a(2^{n-1}) + a(2^{n-1} + 1) + \dots + a(2^n - 1)$$

とおく。

[IV] (つづき)

これに対し,

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a(k) \\
 &= a(2^n) + a(2^n + 1) + a(2^n + 2) + a(2^n + 3) + \cdots + a(2^{n+1} - 2) + a(2^{n+1} - 1) \\
 &= \{a(2^n) + a(2^n + 2) + \cdots + a(2^{n+1} - 2)\} \\
 &\quad + \{a(2^n + 1) + a(2^n + 3) + \cdots + a(2^{n+1} - 1)\} \\
 &= \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a(2k) + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a(2k+1) \\
 &= \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \{3a(k) + 1\} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \{3a(k) + 2\} \\
 &= \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \{6a(k) + 3\} = 6 \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a(k) + 3(2^n - 2^{n-1}) = 6T_n + 3 \cdot 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

より, $T_{n+1} = 6T_n + 3 \cdot 2^{n-1}$ が導かれる。また, $T_1 = a(1) = 2$ 。

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= 6T_n + 3 \cdot 2^{n-1} \\
 \frac{T_{n+1}}{6^{n+1}} &= \frac{T_n}{6^n} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

このとき, $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
 \frac{T_n}{6^n} &= \frac{T_1}{6^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{6} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{11}{24} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

と分かり, $T_n = 6^n \cdot \left\{ \frac{11}{24} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = \frac{11}{4} \cdot 6^{n-1} - \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$ である。

これは, $n = 1$ のときも成り立つ。

よって,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2^n-1} a(k) &= \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{11}{4} \cdot 6^{k-1} - \frac{3}{4} \cdot 2^{k-1} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \frac{6^n - 1}{6 - 1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
 &= \frac{33}{10} \cdot 6^{n-1} - \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{5} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

である。

[IV] (つづき)

(2) の補足

以下、整数をすべて 3 進法で表すものとする、

- $a(2n) = 3a(n) + 1$ は、整数 $a(n)$ の各桁がひとつずつ繰り上がって、整数 $a(n)$ の末尾に 0 が付いて、さらに 1 を足すことで $a(2n)$ ができること
- $a(2n+1) = 3a(n) + 2$ は、整数 $a(n)$ の各桁がひとつずつ繰り上がって、整数 $a(n)$ の末尾に 0 が付いて、さらに 2 を足すことで $a(2n+1)$ ができること

を、それぞれ意味する。

このことを用いると、

$$\begin{aligned} a(1) &= a(2^0) = 2_{(3)} \\ a(2) &= a(2^1) = 20_{(3)} + 1_{(3)} = 21_{(3)} \\ a(4) &= a(2^2) = 210_{(3)} + 1_{(3)} = 211_{(3)} \\ a(8) &= a(2^3) = 2110_{(3)} + 1_{(3)} = 2111_{(3)} \\ a(16) &= a(2^4) = 21110_{(3)} + 1_{(3)} = 21111_{(3)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

とできるから、 $n \geq 2$ に対して $a(2^{n-1}) = \underbrace{2111 \cdots 1}_{n-1 \text{ 個}}_{(3)}$ と分かる。

ゆえに、

$$\begin{aligned} a(2^n + 1) &= 3a(2^{n-1}) + 2 \\ &= \underbrace{2111 \cdots 10}_{n-1 \text{ 個}}_{(3)} + 2_{(3)} \\ &= \underbrace{2111 \cdots 12}_{n-1 \text{ 個}}_{(3)} \end{aligned}$$

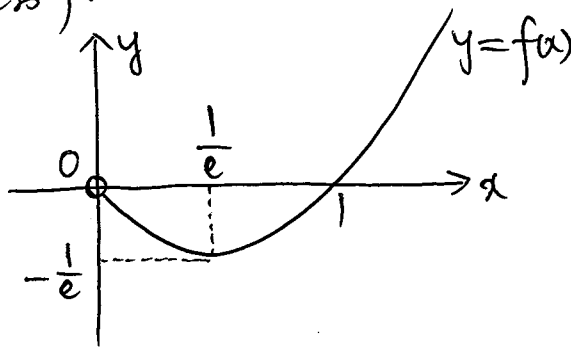
ということが出来る。

[V]

(1) $f(x) = x \log x$ ①, $f'(x) = \log x + 1$.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	(∞)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	(∞)

増減(①上のおり). 極大値はなし, 極小値は $-\frac{1}{e}$ (答)
グラフは下のおり).



(2) $f(x) = g(x)$

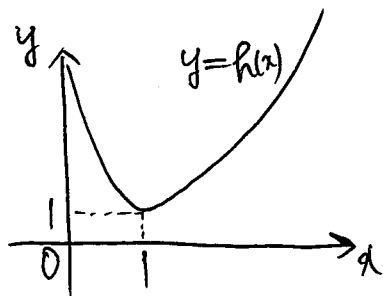
$\Leftrightarrow x \log x = ax - 1$

$\Leftrightarrow \log x + \frac{1}{x} = a$.

$h(x) = \log x + \frac{1}{x}$ とおく. $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ①)

x	(0)	...	1	...	(∞)
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	(∞)

$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \log x + 1}{x} = \infty$.

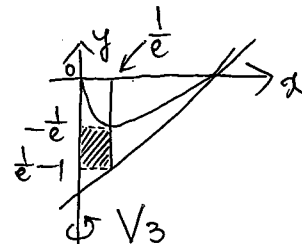
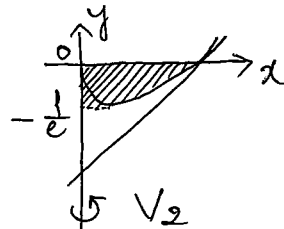
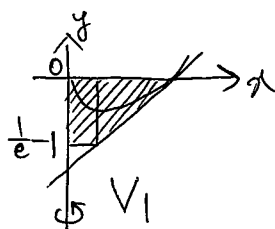
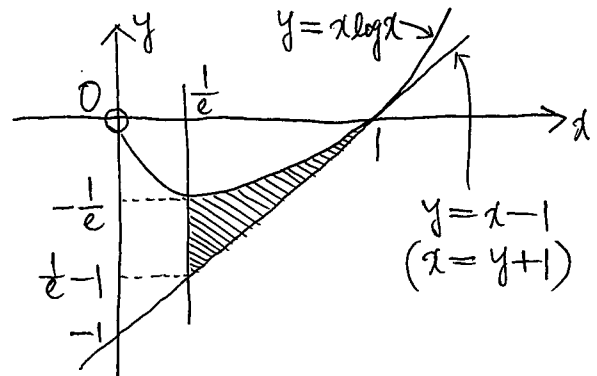


(*) ①) 求める共有点の個数は, 曲線 $y = h(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に等しいので,

$\begin{cases} 0 \text{ 個} & (a < 1 \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (a = 1 \text{ のとき}) \dots \dots \text{(答)} \\ 2 \text{ 個} & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

[V] (つづき)

(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ の共有点が 1 個のとき, (2) の $a=1$ であり, それらのグラフは右図のようになる.



上図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とすると,

$$V_1 = \int_{\frac{1}{e}-1}^0 \pi(y+1)^2 dy = \pi \left[\frac{1}{3}(y+1)^3 \right]_{\frac{1}{e}-1}^0 = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right),$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{-\frac{1}{e}}^0 \pi x^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (\log x + 1) dx \quad \left(\begin{array}{l} y = x \log x \text{ より} \\ dy = (\log x + 1) dx \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} y |_{-\frac{1}{e}} \geq 0 \\ x |_{\frac{1}{e}} \geq 1 \end{array} \right) \\ &= \pi \left(\left[\frac{1}{3} x^3 \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \right) \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3e^3} - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{1}{e} \right)^2 \left\{ -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \right\} \\ &= \pi \frac{1}{e^2} \left(1 - \frac{2}{e} \right). \end{aligned}$$

[V](つづき)

求める体積は、

$$\begin{aligned} & V_1 - V_2 - V_3 \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \pi \left\{ \frac{1}{3e^3} - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \right\} \\ & \quad - \pi \frac{1}{e^2} \left(1 - \frac{2}{e}\right) \\ &= \frac{\pi}{9} \left\{ -\frac{3}{e^3} + \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \frac{9}{e^2} \left(1 - \frac{2}{e}\right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{9} \left(1 - \frac{9}{e^2} + \frac{14}{e^3}\right) \text{-----} (\text{答}) \end{aligned}$$