1

(1) $C: y=x^2$ について $y'=2x$ であるから，C 上の点 (t, t^2) (t は実数) における C の接線の方程式は $y=2t(x-t)+t^2$

$$y=2tx-t^2 \quad \cdots ①$$

① が点 $(u, u-1)$ $(u>0)$ を通るとき，$u-1=2tu-t^2$ より，

$$t^2-2ut+u-1=0 \quad \cdots ②$$

② の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=u^2-(u-1)$$
$$=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，② は t の 2次方程式として異なる 2つの実数解をもつ．

よって，C の接線で点 $(u, u-1)$ を通るものがちょうど 2本ある．

(証明終り)

(2) $P_1(\alpha, \alpha^2)$，$P_2(\beta, \beta^2)$ とすれば，α, β は ② の異なる 2つの実数解であり，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2u, \quad \alpha\beta=u-1$$

$$(P_1P_2 \text{ の傾き})=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$
$$=\alpha+\beta$$
$$=2u>0$$

より，$(m \text{ の傾き})=-\dfrac{1}{2u}<0$

である．よって，m は y 軸と平行ではないから，y 軸と交わる．

(証明終り)

線分 P_1P_2 の中点の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2u}{2}, \frac{(2u)^2-2(u-1)}{2}\right)$$
$$=(u, 2u^2-u+1)$$

であるから，m の方程式は

$$y=-\frac{1}{2u}(x-u)+2u^2-u+1$$
$$y=-\frac{1}{2u}x+2u^2-u+\frac{3}{2}$$

よって，

$$g(u)=2u^2-u+\frac{3}{2}$$
$$=2\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$$

であるから，u が $u>0$ の全体を動くとき，

$$g(u) \text{ の最小値は } \frac{11}{8} \quad \cdots (\text{答})$$

であり，それを与えるのは

$$u=\frac{1}{4} \quad \cdots (\text{答})$$

2

$$a^2+2b^2=c^2 \quad \cdots(*)$$

(1)　$(a,b,c)=(1,2,3)$ ……〔答〕

(2)　$(a,b,c)=(k,2k,3k)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ は $(*)$ を満たす正整数の無限個の組を与える。

実際，$(*)$に代入すれば

$$k^2+2(2k)^2=(3k)^2 \iff 1^2+2\cdot2^2=3^2$$

と，確かに成立している。（証明おわり）

(3) 正整数の組 (a,b,c) が $(*)$を満たすとき，$c^2-a^2=2b^2$ より

$$(c+a)(c-a)=2b^2 \quad \cdots(*')$$

が成り立つ。$c+a-(c-a)=2a$ が偶数ゆえ，$c+a$, $c-a$ はともに偶数またはともに奇数であるが，右辺の $2b^2$ が偶数だから，$c\pm a$ はともに偶数であり，$(*')$左辺は $2^2=4$ の倍数である。bが奇数では右辺 $2b^2$ は4の倍数にならず，bは偶数である。すなわち $(*)$の下で，

$a+c$，bはともに偶数である。

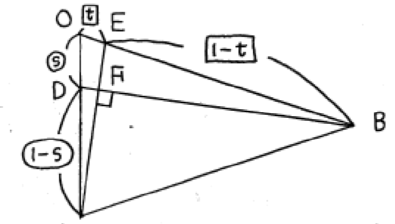
また，a, cが偶数の場合，$a=2A$，$c=2C$，$b=2B$ とおけば（A, B, Cは正整数），$(*)$に代入して $4A^2+2\cdot4B^2=4C^2$．4で割り

$$A^2+2B^2=C^2$$

(A,B,C) は $(*)$を満たす正整数の組だから，Bは偶数であり，$b=2B$は4の倍数である。

（証明おわり）

3 (ここには 3 の解答を記入すること。)



$0<s<1,\ 0<t<1$

(1) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = s\vec{a} - \vec{b}$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$ より,

$(s\vec{a} - \vec{b})\cdot(t\vec{b} - \vec{a}) = 0$

展開して $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $|\vec{a}|^2 = 2$, $|\vec{b}|^2 = 5$ を代入すれば,

$st - 2s - 5t + 1 = 0$

$(s-5)t = 2s - 1$

$s \neq 5$ であるから,

$$t = \frac{2s-1}{s-5} \quad \cdots(答)$$

これと $0<t<1$ より

$$0 < \frac{2s-1}{s-5} < 1$$

$0<s<1$ より $s-5<0$ だから,

$$0 > 2s-1 > s-5$$

$s < \frac{1}{2}$ かつ $s > -4$

よって, s のとりうる値の範囲は

$$0 < s < \frac{1}{2} \quad \cdots(答)$$

(2) F は直線 AE 上の点であるから,

$$\overrightarrow{OF} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OE}$$
$$= (1-k)\vec{a} + tk\vec{b} \quad \cdots ①$$

(k は実数) と表せる.

F は直線 BD 上の点であるから,

$$\overrightarrow{OF} = (1-\ell)\overrightarrow{OB} + \ell\overrightarrow{OD}$$
$$= s\ell\vec{a} + (1-\ell)\vec{b} \quad \cdots ②$$

(ℓ は実数) とも表せる.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立であるから, ①, ② より,

$$\begin{cases} 1-k = s\ell \\ tk = 1-\ell \end{cases}$$

この2式と $t = \dfrac{2s-1}{s-5}$ より k, t を消去することで,

$$\ell = \frac{s+4}{2s^2-2s+5},\quad 1-\ell = \frac{2s^2-3s+1}{2s^2-2s+5}$$

を得る. これらと ② より,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{s^2+4s}{2s^2-2s+5}\vec{a} + \frac{2s^2-3s+1}{2s^2-2s+5}\vec{b}$$

$\cdots$(答)

(3) $|\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB} = 4$ を変形して,

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 4 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OF}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= 5 + 2 - 2\cdot 1 = 5$$

を代入して,

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB}|^2 = 9 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OF}$$

これより, P の全体が半径3の円をなすための条件は $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OF} = 0$ すなわち

$$\overrightarrow{OF}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots(答)$$

これと (2) の結果から,

$$s^2 + 4s - 2(s^2+4s) + 5(2s^2-3s+1) - (2s^2-3s+1) = 0$$

$$7s^2 - 16s + 4 = 0$$

$$(7s-2)(s-2) = 0$$

$0 < s < \frac{1}{2}$ より,

$$s = \frac{2}{7} \quad \cdots(答)$$

4

（ここには 4 の解答を記入すること。）

(1) $f(x)=x^4-x^2$ より $f'(x)=4x^3-2x=2x(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$

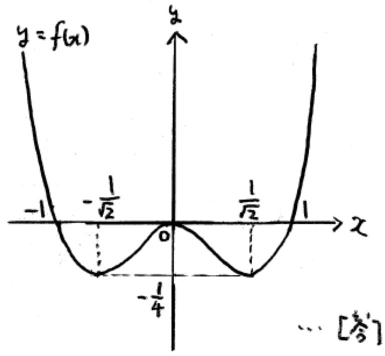
これより、$f(x)$ の増減は右表のようになり、

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

$f(x)$ は $x=0$ で極大値 0, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。 … [答]

また、$f(-x)=f(x)$ が成り立つので、$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称である。

これらのことから、$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



… [答]

(2) $y=-\frac{1}{4}$ … [答]

(3)
$$S=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{f(x)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^4-x^2+\frac{1}{4}\right)dx=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{15}$$

次に、直線 m の方程式は $y=a\ (a>0)$ と表すことができ、m と曲線 $y=f(x)$ のグラフは $x>1$ の部分と $x<-1$ の部分で 1点ずつ交わる。

また、x の方程式 $x^4-x^2=a$ を考えると、$x^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$ このうち、$x^2>1$ をみたしているのは、$x^2=\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$

よって、$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}}$ とすると、m と $y=f(x)$ のグラフの交点の x 座標は α と $-\alpha$ である。このとき α は $\alpha>1$ と $a=\alpha^4-\alpha^2$ を満たしている。これより、

$$T=\int_{-\alpha}^{\alpha}\{a-f(x)\}dx=2\int_0^{\alpha}(\alpha^4-\alpha^2-x^4+x^2)dx=2\left[\alpha^4x-\alpha^2x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\alpha}$$
$$=\frac{8}{5}\alpha^5-\frac{4}{3}\alpha^3$$

以上より、$\frac{T}{S}=\dfrac{\frac{8}{5}\alpha^5-\frac{4}{3}\alpha^3}{\frac{2\sqrt{2}}{15}}=6\sqrt{2}\alpha^5-5\sqrt{2}\alpha^3$

ここで、$g(\alpha)=6\sqrt{2}\alpha^5-5\sqrt{2}\alpha^3$ とし、$\alpha>1$ における $g(\alpha)$ のとりうる値の範囲を求める。

$g'(\alpha)=30\sqrt{2}\alpha^4-15\sqrt{2}\alpha^2=15\sqrt{2}\alpha^2(2\alpha^2-1)$ なので、$\alpha>1$ においては つねに $g'(\alpha)>0$

$g(1)=6\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\sqrt{2}$ なので、$\alpha>1$ において $g(\alpha)$ のとりうる値の範囲は $g(\alpha)>\sqrt{2}$

以上より $\frac{T}{S}>\sqrt{2}$ が成り立つ。

（証明終り）

※ x 軸と $y=f(x)$ のグラフが囲む 2つの領域の面積の和を U とすると、$U=\int_{-1}^{1}\{0-f(x)\}dx=2\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{4}{15}$

$T>U$ であるから、$\frac{T}{S}>\frac{U}{S}=\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{2\sqrt{2}}{15}}=\sqrt{2}$ となり、$\frac{T}{S}>\sqrt{2}$