1

(1) $C: y=x^2$ について $y'=2x$ であるから，C 上の点 (t, t^2) (t は実数) における C の接線の方程式は $y=2t(x-t)+t^2$

$$y=2tx-t^2 \quad \cdots ①$$

① が点 $(u, u-1)$ $(u>0)$ を通るとき，$u-1=2tu-t^2$ より，

$$t^2-2ut+u-1=0 \quad \cdots ②$$

② の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=u^2-(u-1)$$
$$=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，② は t の 2次方程式として異なる 2つの実数解をもつ．

よって，C の接線で点 $(u, u-1)$ を通るものがちょうど 2本ある．

(証明終り)

(2) $P_1(\alpha, \alpha^2)$，$P_2(\beta, \beta^2)$ とすれば，α, β は ② の異なる 2つの実数解であり，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2u, \quad \alpha\beta=u-1$$

$$(P_1P_2 \text{の傾き})=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$
$$=\alpha+\beta$$
$$=2u>0$$

より，$(m \text{の傾き})=-\dfrac{1}{2u}<0$

である．よって，m は y 軸と平行ではないから，y 軸と交わる．

(証明終り)

線分 P_1P_2 の中点の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2u}{2}, \frac{(2u)^2-2(u-1)}{2}\right)$$
$$=(u, 2u^2-u+1)$$

であるから，m の方程式は

$$y=-\frac{1}{2u}(x-u)+2u^2-u+1$$
$$y=-\frac{1}{2u}x+2u^2-u+\frac{3}{2}$$

よって，

$$g(u)=2u^2-u+\frac{3}{2}$$
$$=2\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$$

であるから，u が $u>0$ の全体を動くとき，

$g(u)$ の最小値は $\dfrac{11}{8}$ …(答)

であり，それを与えるのは

$u=\dfrac{1}{4}$ …(答)

2

$$a^2+2b^2=c^2 \quad \cdots (*)$$

(1) $(a,b,c)=(1,2,3)$ …[答]

(2) $(a,b,c)=(k,2k,3k)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ は $(*)$ を満たす正整数の無限個の組を与える。

実際，$(*)$に代入すれば

$$k^2+2(2k)^2=(3k)^2 \iff 1^2+2\cdot 2^2=3^2$$

と，確かに成立している。 (証明おわり)

(3) 正整数の組 (a,b,c) が $(*)$を満たすとき，$c^2-a^2=2b^2$ より

$$(c+a)(c-a)=2b^2 \quad \cdots (*')$$

が成り立つ。$c+a-(c-a)=2a$ が偶数ゆえ，$c+a, c-a$ はともに偶数またはともに奇数であるが，右辺の $2b^2$ が偶数だから，$c\pm a$ はともに偶数であり，$(*')$左辺は $2^2=4$ の倍数である。bが奇数では右辺 $2b^2$ は4の倍数にならず，bは偶数である。すなわち $(*)$の下で，

a, c，bはともに偶数である。

また，a, c が偶数の場合，$a=2A$，$c=2C$，$b=2B$ とおけば $(A, B, C$ は正整数$)$，$(*)$に代入して $4A^2+2\cdot 4B^2=4C^2$．4で割り

$$A^2+2B^2=C^2$$

(A,B,C) は $(*)$を満たす正整数の組だから，Bは偶数であり，$b=2B$ は4の倍数である。

(証明おわり)

3

$$\begin{cases} f_{内}(x)=8x^3-6x^2+2 \\ f_{外}(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d \end{cases}$$ (xは全実数)

とすると,

$$\begin{cases} f'_{内}(x)=24x^2-12x \\ f'_{外}(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c \end{cases}$$

(1) $f(x)$が$x=1$で連続であるよう,

$f_{外}(1)=f_{内}(1)\ [=f(1)]$ ・・・・①

$3+a+b+c+d=8-6+2$

$a+b+c+d=1$ ・・・・②

$x=-1$で$f(x)$が連続であるよう

$f_{外}(-1)=f_{内}(-1)$

$3-a+b-c+d=-12$

$-a+b-c+d=-15$ ・・・・③

$f(x)$が$x=1$で微分可能であるよう

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f_{内}(x)-f_{内}(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{f_{外}(x)-f_{内}(1)}{x-1}$$

左辺は$f'_{内}(1)$であり,右辺は①より,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f_{外}(x)-f_{内}(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{f_{外}(x)-f_{外}(1)}{x-1}$$

$$=f'_{外}(1)$$

なので,$f'_{内}(1)=f'_{外}(1)$

$12=12+3a+2b+c$

$3a+2b+c=0$ ・・・・④

同様にして,$f(x)$が$x=-1$で微分可能であるよう,$f'_{内}(-1)=f'_{外}(-1)$

$36=-12+3a-2b+c$

$3a-2b+c=48$ ・・・⑤

②,③,④,⑤より

$a=8,\ b=-12,\ c=0,\ d=5.$ ・・・・(答)

($x=\pm1$以外のxについて,$f(x)$は明らかに微分可能である。)

(2)

$$f'(x)=\begin{cases} 24x^2-12x & (|x|\leqq 1) \\ 12x^3+24x^2-24x & (|x|>1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 12x(2x-1) & (|x|\leqq 1) \\ 12x(x^2+2x-2) & (|x|>1) \end{cases}$$

より,$f(x)$の増減は次の通り.

x		$-1-\sqrt{3}$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↗	-12	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$	↗		↗

この増減表より,$f(x)$の最小値を与えるxは$-1-\sqrt{3}$ ・・・・(答)である。

さらに,$|x|>1$のとき,

$f(x)=3x^4+8x^3-12x^2+5$

$=(3x^2+2x-10)(x^2+2x-2)+24x-15.$

$x=-1-\sqrt{3}$は$x^2+2x-2=0$の解であるから,求める最小値は

$f(-1-\sqrt{3})=24(-1-\sqrt{3})-15$

$=-39-24\sqrt{3}.$ ・・・・・(答)

4

P が (m, n) から $(m+1, n)$, $(m-1, n)$, $(m, n+1)$, $(m, n-1)$ へ移動することを順に →, ←, ↑, ↓ で表す。

(1) 時刻 8 に P が $(4, 0)$ にあるのは, 8 回の移動が

{→, →, →, →, →, →, ←, ←}, {→, →, →, →, ↑, ↑, ↓, ↓}, {→, →, →, →, →, ←, ↑, ↓}

のいずれかの場合であり, 移動方法は全部で

$$\frac{8!}{6!\,2!}+\frac{8!}{4!\,2!\,2!}+\frac{8!}{5!}=784\text{(通り)}$$

求めるべき確率は

$$\frac{784}{4^8}=\frac{49}{4096} \quad \cdots\text{[答]}$$

(2) 点 (x, y) が第 1 象限にある場合, $(x+y)(x-y)=16$ において, $x+y$, $x-y$ はともに偶数 ($\because$ $x+y-(x-y)=2y$ が偶数で $x\pm y$ の偶奇が一致し, 積 $(x+y)(x-y)=16$ が偶数である), また $x>y$ であることに注意すると, $(x+y, x-y)=(8, 2)$ すなわち $(x, y)=(5, 3)$ が唯一の点である。

時刻 8 に P が $(5, 3)$ にある移動は {→, →, →, →, →, ↑, ↑, ↑} の $\frac{8!}{5!\,3!}=56$ 通りで, 同様に $(5, -3)$, $(-5, \pm 3)$ にある移動方法も 56 通りずつになる。

また, $(\pm 4, 0)$ も $x^2-y^2=16$ 上の点で (1) から 784 通りずつだから, 求めるべき確率は

$$\frac{56\times 4+784\times 2}{4^8}=\frac{7}{256} \quad \cdots\text{[答]}$$

(3) 原点 O から点 $(4, 2)$ まで少なくとも $4+2=6$ 回の移動が必要であり, ちょうど 6 回の移動 {→, →, →, →, ↑, ↑} で時刻 6 に P が $(4, 2)$ にあるから, その後時刻 8 に $(5, 3)$, $(4, 0)$ へ移動する場合のみ可能である。この移動方法は

$$\frac{6!}{4!\,2!}\times(2!+1)=45\text{ (通り)}$$

であるから、求めるべき条件つき確率は

$$\frac{45}{4^8}\bigg/\frac{7}{256}=\frac{45}{1792} \quad \cdots\text{[答]}$$

5 (ここには5の解答を記入すること。)

(1) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$

ベクトル $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = e^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t)$ を方向ベクトルにもつ直線が y 軸に平行であるような t $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ は,

$\cos t - \sin t = 0$ (かつ $\sin t + \cos t \neq 0$) より $t = \frac{\pi}{4}$

このとき $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ なので, 直線 ℓ の方程式は

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}} \quad \cdots (答)$$

(2) $$I = \int e^{\alpha t}\cos\beta t\, dt = \int e^{\alpha t}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right)' dt$$
$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha t}\sin\beta t\, dt$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t - \frac{\alpha}{\beta}J \quad \cdots ①$$

$$J = \int e^{\alpha t}\sin\beta t\, dt = \int e^{\alpha t}\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta t\right)' dt$$
$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha t}\cos\beta t\, dt$$

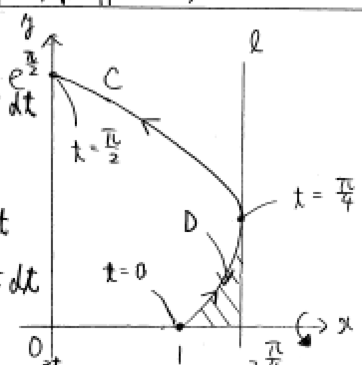
$$\therefore\ J = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}I \quad \cdots ②$$

①, ② を I, J の連立方程式とみて解く。C_1, C_2 を積分定数として

$$I = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta t + \alpha\cos\beta t) + C_1,\quad J = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) + C_2 \quad \cdots (答)$$

(3)

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
(x, y)		↗		↖	



$$V = \pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}} y^2\, dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2\frac{dx}{dt}\, dt$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t}\sin^2 t \cdot e^t(\cos t - \sin t)\, dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3t}(1 - \cos 2t)(\cos t - \sin t)\, dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}(\cos t - \sin t - \cos 2t\cos t + \cos 2t\sin t)\, dt$$

$\cos 2t\cos t = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$,

$\cos 2t\sin t = \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)$ より

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\cos t\, dt - \frac{3}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\sin t\, dt$$
$$- \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\cos 3t\, dt + \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\sin 3t\, dt$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$- \frac{3}{4}\pi\left[\frac{e^{3t}}{10}(3\sin t - \cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3t}}{6}(\sin 3t + \cos 3t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$+ \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3t}}{6}(\sin 3t - \cos 3t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

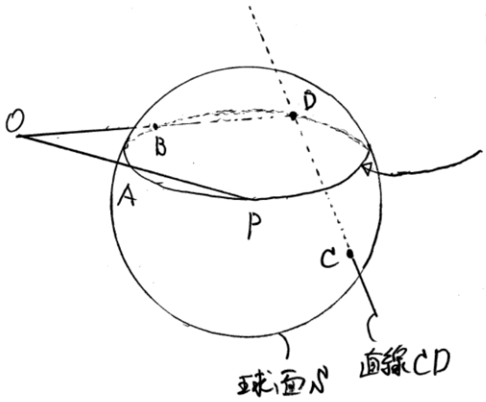
((2) より)

$$= \frac{\sqrt{2}}{60}\pi e^{\frac{3}{4}\pi} - \frac{\pi}{15} \quad \cdots (答)$$

6

(1) A, B, P は球面 S 上より同一直線上にはなく、$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=b\overrightarrow{OB}$ より
O, P, A は同一直線上、O, Q, B も同一直線上。よって平面 α 上に点 Q は存在する　(証明終)

(2) $a|\overrightarrow{OA}|^2=b|\overrightarrow{OB}|^2$ より $|a\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}|=|b\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OB}|$
$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OB}|$
よって方べきの定理の逆により 4 点 A, B, P, Q は同一円周上に存在する。この円は球面 S と平面 α の交線となるので左図のような円となり、点 Q も S 上に存在する。



また直線 CD と球面 S との交点は C, D だけなので、点 Q が直線 CD 上にあることより、点 Q は点 C, D のいずれかと等しい。

(証明終)