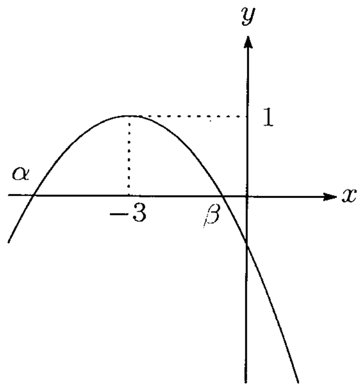
第 1 問

$f(x)=k(x-\alpha)(\beta-x)=-k(x-\alpha)(x-\beta)$ とおく．

$k>0$ より，$C: y=f(x)$ は上に凸な放物線であり，x 軸と 2 点 $(\alpha,0)$，$(\beta,0)$ で交わる．



C の頂点は $(-3,1)$ であるから，$f(x)=-k(x+3)^2+1$ と表せる．

また，α，β $(\alpha<\beta)$ は 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 解であるから，$k>0$ に注意して $-k(x+3)^2+1=0$ を解くことにより，α，β は

$$\alpha=-3-\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \beta=-3+\frac{1}{\sqrt{k}}$$

と定まる．

さらに C は y 軸と $-2\leqq y\leqq 0$ の範囲で交わるから，

$$-2\leqq f(0)\leqq 0 \text{ より，} -2\leqq -9k+1\leqq 0,$$

すなわち

$$\frac{1}{9}\leqq k\leqq\frac{1}{3} \qquad \cdots①$$

が成り立つ．このもとで，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta f(x)dx\\
&=-k\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=-k\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\
&=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{k}{6}\left\{-3+\frac{1}{\sqrt{k}}-\left(-3-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}^3\\
&=\frac{4}{3\sqrt{k}}
\end{aligned} \qquad \cdots②$$

となる．

© 河合塾　2026 年

第１問（つづき）

一方，①より，

$$\sqrt{3} \leqq \frac{1}{\sqrt{k}} \leqq 3$$

であるから，求める S の範囲は②より，

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \leqq S \leqq 4 \qquad \cdots(答)$$

である．

© 河合塾　2026 年

第 2 問

余事象を考える．三角形ができないのは，選んだ 3 点が同一直線上に並ぶときであり，以下の場合がある．

- y 軸に平行な直線
- y 軸に平行でない直線

(1) $n=5$ のとき，点の総数は，$3\times5=15$ 個であり，15 個の点から 3 点を選ぶ選び方は，全部で

$${}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}=455(\text{通り})$$

同一直線上にある 3 点の選び方について，

(ア) y 軸に平行の場合

$x=1,2,3$ の 3 列あり，各列 5 個の点から 3 個を選んで，

$$3\cdot{}_5\mathrm{C}_3=30(\text{通り})$$

(イ) y 軸に平行でない場合

$x=1,2,3$ からそれぞれ 1 点ずつ選び，その両端点を $(1,y_1)$ と $(3,y_3)$ とおくと，その中点 $\left(2,\dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$ が格子点となればよい．よって，y_1 と y_3 の偶奇が一致する組を考えればよく，

$$(y_1,y_3)=(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)$$

の 13 通り．

したがって，求める確率 p_5 は，

$$p_5=1-\frac{30+13}{455}=\boldsymbol{\frac{412}{455}}$$ …(答)

(2) $n=2m$ のとき，点の総数は $6m$ 個であり，$6m$ 個の点から 3 点を選ぶ選び方は，全部で

$${}_{6m}\mathrm{C}_3=\frac{6m(6m-1)(6m-2)}{3\cdot2\cdot1}=2m(6m-1)(3m-1)(\text{通り})$$

(1) と同様に同一直線上にある 3 点の選び方を数える．

(ア) y 軸に平行の場合

$x=1,2,3$ の 3 列あり，各列 $2m$ 個の点から 3 個を選んで，

$$3\cdot{}_{2m}\mathrm{C}_3=3\cdot\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{3\cdot2\cdot1}=2m(2m-1)(m-1)(\text{通り})$$

(イ) y 軸に平行でない場合

(1) と同様に考えて，$(1,y_1)$ と $(3,y_3)$ の中点 $\left(2,\dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$ が格子点となるような y_1 と y_3 の選び方は，$1\leqq y\leqq 2m$ には偶数，奇数がともに m 個あることから，

$$m^2+m^2=2m^2(\text{通り})$$

したがって，求める確率 p_{2m} は，

$$\begin{aligned}p_{2m}&=1-\frac{2m(2m-1)(m-1)+2m^2}{2m(6m-1)(3m-1)}\\&=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}\\&=\boldsymbol{\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}\end{aligned}$$ …(答)

© 河合塾　2026 年

第 2 問（つづき）

【(2) の (イ) を求める部分の別解】

(イ)(a) x 軸に平行の場合

$y=1,2,\cdots,2m$ の $2m$ 行あり，各行 3 個の点から 3 個を選んで，$2m$ 通り．

(イ)(b) x 軸にも y 軸にも平行でない場合

$x=1,2,3$ からそれぞれ 1 点ずつ選び，その 3 点を $(1,y_1),(2,y_2),(3,y_3)$ とおくと，y_1, y_2, y_3 は 0 でない公差 k の等差数列をなし，k が正の整数のとき，

$$(y_1,y_2,y_3)=(1,1+k,1+2k),(2,2+k,2+2k),\cdots,(2m-2k,2m-k,2m)$$

の $2m-2k$ 通りある．ただし，$1+2k \leqq 2m$ より，$k \leqq m-1$ である．

公差が $-k$ となる選び方も同数あるから，この場合の 3 点の選び方は，

$$2\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k)=2m(m-1)(\text{通り})$$

よって，このときの選び方は，

$$2m+2m(m-1)=2m^2(\text{通り})$$

【(2) の (イ) を求める部分の別解終り】

© 河合塾　2026 年

第３問

(1)　$x \geqq 4$ において $f(x) > g(x)$ であることを示すには，次の２つを示せばよい．

$4 \leqq x < 5$ において，$f(x) > g(x)$ である．　…①
$x \geqq 5$ において，$f(x) > g(x)$ である．　…②

①については，$4 \leqq x < 5$ において，$g(x) = x - 4$ であるから，

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{a}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{a} - 3 - (x-4) \\ &= \frac{a}{8}(x-1)^2 - (x-1) + \frac{2}{a} \\ &= \frac{a}{8}\left\{(x-1) - \frac{4}{a}\right\}^2 \\ &= \frac{a}{8}\left\{\frac{4}{a} - (x-1)\right\}^2 \end{aligned}$$

が成り立ち，これと $0 < a < 1$ より

$$\frac{4}{a} - (x-1) > 4 - (x-1) = 5 - x > 0$$

となるので，$f(x) - g(x) > 0$ すなわち $f(x) > g(x)$ が成り立つ．

②については，$x \geqq 5$ において $f(x) = \dfrac{a}{8}(x-1)^2 + \dfrac{2}{a} - 3$ は増加するので，

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &\geqq f(5) - 1 \\ &= \frac{a}{8}(5-1)^2 + \frac{2}{a} - 4 \\ &= \frac{2 - 4a + 2a^2}{a} \\ &= \frac{2(1-a)^2}{a} \\ &> 0 \qquad (0 < a < 1 \text{ より}) \end{aligned}$$

すなわち $f(x) > 1$ が成り立ち，任意の整数 n に対し，

$2n \leqq x < 2n+1$ のとき，　$g(x) = x - 2n < 2n + 1 - 2n = 1$,
$2n+1 \leqq x < 2n+2$ のとき，　$g(x) = -x + 2n + 2 \leqq -(2n+1) + 2n + 2 = 1$

となり，いずれの場合も $g(x) \leqq 1$ であるから，$f(x) > g(x)$ が成り立つ．

以上より，①と②がともに成り立つので，$x \geqq 4$ において $f(x) > g(x)$ である．　（証明終り）

© 河合塾　2026 年

第３問（つづき１）

(2)　(1) の結果より，$x \geqq 4$ において $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは共有点をもたないから，$x \geqq 0$ における共有点の個数は，$0 \leqq x < 4$ における共有点の個数に等しい．

まず，$0 \leqq x < 4$ において，

$$\begin{cases} 0 \leqq x < 1 \text{ のとき，} & g(x)=x, \\ 1 \leqq x < 2 \text{ のとき，} & g(x)=-x+2, \\ 2 \leqq x < 3 \text{ のとき，} & g(x)=x-2, \\ 3 \leqq x < 4 \text{ のとき，} & g(x)=-x+4 \end{cases} \qquad \cdots ③$$

である．

次に，$\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは点 $\left(1,\ \dfrac{2}{a}-3\right)$ を頂点とする下に凸な放物線であり，$\dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{a} < 2$ より $0 < \dfrac{2}{a}-3 < 1$ が成り立つので，

$y=f(x)$ のグラフの頂点は２点 $(1,\ 0)$ と $(1,\ 1)$ を結ぶ線分（端点除く）の上にある．　$\cdots ④$

最後に，$2 \leqq x < 3$ において，$g(x)=x-2$ より

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3-(x-2) \\ &= \frac{a}{8}(x-1)^2-(x-1)+\frac{2}{a}-2 \\ &= \frac{a}{8}\left\{(x-1)-\frac{4}{a}\right\}^2-2 \\ &= \frac{a}{8}\left\{x-\left(1+\frac{4}{a}\right)\right\}^2-2 \end{aligned}$$

と表せるので，関数 $y=f(x)-g(x)$ のグラフは点 $\left(1+\dfrac{4}{a},\ -2\right)$ を頂点とする下に凸な放物線であり，$\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$ より $1+\dfrac{4}{a} > 7$ であるから，この放物線の軸 $x=1+\dfrac{4}{a}$ は $x>7$ の範囲にある．また，

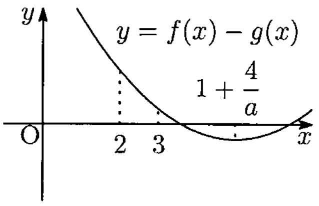
$$\begin{aligned} f(2)-g(2) &= \frac{a}{8}(2-1)^2+\frac{2}{a}-3-0 \\ &= \frac{a}{8}+\frac{2-3a}{a} \\ &> 0 \qquad \left(\frac{a}{8}>0 \text{ かつ } \frac{2-3a}{a}>0 \text{ より}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3)-g(3) &= \frac{a}{8}(3-1)^2+\frac{2}{a}-3-1 \\ &= \frac{a}{2}+\frac{2}{a}-4 \\ &= \frac{a^2-8a+4}{2a} \\ &= \frac{(4+2\sqrt{3}-a)(4-2\sqrt{3}-a)}{2a} \end{aligned}$$

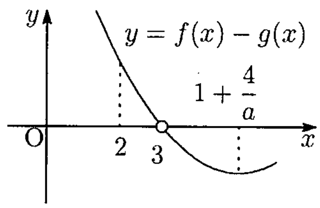
であることから，$2 \leqq x < 3$ における関数 $y=f(x)-g(x)$ のグラフは次のようになる．

© 河合塾　2026 年

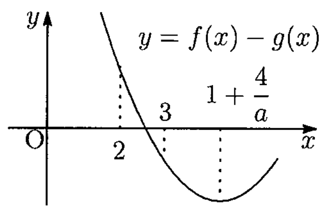
第３問（つづき２）



$\frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3}$のとき

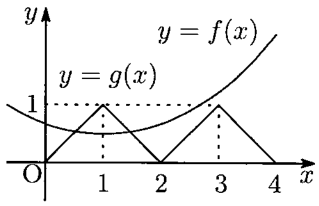


$a = 4 - 2\sqrt{3}$のとき

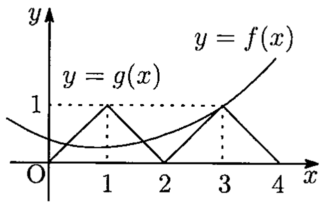


$4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3}$のとき

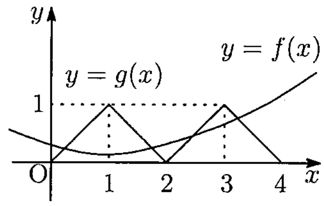
このことと③，④より，$0 \leqq x < 4$ における $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは次のようになる．



$\frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3}$のとき



$a = 4 - 2\sqrt{3}$のとき



$4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3}$のとき

したがって，求める個数は，

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3}\text{のとき，} & 2\text{個，} \\ a = 4 - 2\sqrt{3}\text{のとき，} & 3\text{個，} \\ 4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\text{のとき，} & 4\text{個} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

© 河合塾　2026 年

第 4 問

(1) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{6}$ のとき，

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - (\tan\theta)\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{\tan\theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} \qquad \cdots (答)$$

(2) $\mathrm{P}(p,\ p^3 - kp)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^3 - kq)$ $(p \neq q,\ p \neq 0,\ q \neq 0)$ とおく．

$C : y = x^3 - kx$ のとき，$y' = 3x^2 - k$ であるから，C の O，P，Q における接線をそれぞれ l_{O}，l_{P}，l_{Q} とすると，l_{O}，l_{P}，l_{Q} の傾きはそれぞれ，

$$-k,\quad 3p^2 - k,\quad 3q^2 - k$$

であり，$p \neq q$，$p \neq 0$，$q \neq 0$ より，

$$-k < 3p^2 - k < 3q^2 - k$$

として一般性を失わない．

したがって，l_{O}，l_{P}，l_{Q} が x 軸の正の方向からまわる角をそれぞれ α，β，γ とすると，

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2} \qquad \cdots ①$$

このとき，条件 (*) を満たすのは，

(ア) l_{O} から l_{P} へのまわる角が $\frac{\pi}{3}$

(イ) l_{O} から l_{Q} へのまわる角が $\frac{2}{3}\pi$ $\left(すなわち -\frac{\pi}{3}\right)$

が同時に成り立つことである．

したがって，

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{3},\quad \gamma = \alpha + \frac{2}{3}\pi$$

となり，①より，

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha + \frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{2}{3}\pi < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{6} \qquad \cdots ②$$

であるから，$\theta = \alpha$ とおけ，

$$\tan\theta = -k,\quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3p^2 - k,\quad \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3q^2 - k$$

②より，$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{6}$ に注意すると，(1) の結果と (ア) より，

$$3p^2 - k = \frac{-k + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}(-k)}$$
$$p^2 = \frac{k^2 + 1}{3k + \sqrt{3}} \qquad \cdots ③$$

同様に，$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{6}$ のとき，$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\theta}$ と (イ) より，

$$3q^2 - k = \frac{-k - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}(-k)}$$
$$q^2 = \frac{k^2 + 1}{3k - \sqrt{3}} \qquad \cdots ④$$

© 河合塾　2026 年

第　4　問（つづき１）

条件 (*) を満たす P，Q が存在するためには，③，④を満たす 0 でない実数 p，q が存在することが必要で，

$$\begin{cases} 3k+\sqrt{3}>0, \\ 3k-\sqrt{3}>0 \end{cases}$$

より，

$$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

逆に，このとき，$p_0=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$，$q_0=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}$ とおくと，$p_0>0$，$q_0>0$ であり，

$$\begin{aligned} {q_0}^2-{p_0}^2 &= \frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}-\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(k^2+1)\{(3k+\sqrt{3})-(3k-\sqrt{3})\}}{(3k-\sqrt{3})(3k+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\,(k^2+1)}{(3k-\sqrt{3})(3k+\sqrt{3})} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より，$p_0<q_0$ が成り立つから，③，④，$p\neq q$，$p\neq 0$，$q\neq 0$ を満たす実数 p，q の組

$$(p,\ q)=(p_0,\ q_0),\quad (p_0,\ -q_0),\quad (-p_0,\ q_0),\quad (-p_0,\ -q_0) \qquad \cdots ⑤$$

が存在するから十分である．

よって，求める k の範囲は，

$$k>\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cdots (答)$$

(3)

$$l_{\mathrm{O}}: y=-kx,\quad l_{\mathrm{P}}: y=(3p^2-k)(x-p)+p^3-kp,\quad l_{\mathrm{Q}}: y=(3q^2-k)(x-q)+q^3-kq$$

すなわち，

$$l_{\mathrm{O}}: y=-kx,\quad l_{\mathrm{P}}: y=(3p^2-k)x-2p^3,\quad l_{\mathrm{Q}}: y=(3q^2-k)x-2q^3$$

l_{O} と l_{P} の方程式を連立すると，

$$(3p^2-k)x-2p^3=-kx$$
$$x=\frac{2}{3}p$$

したがって，l_{O} と l_{P} の交点を A とすると，A の x 座標は $\dfrac{2}{3}p$ であり，l_{O} と l_{Q} の交点を B とすると，同様に B の x 座標は $\dfrac{2}{3}q$ である．

A，B は傾きが $-k$ の直線 l_{O} 上の 2 点であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{1+(-k)^2}\left|\frac{2}{3}q-\frac{2}{3}p\right| \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{1+k^2}|q-p| \end{aligned}$$

l_{O}，l_{P}，l_{Q} によって囲まれる三角形は，一辺の長さが AB の正三角形であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}^2\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}(1+k^2)(q-p)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(q-p)^2 \end{aligned}$$

© 河合塾　2026 年

第 4 問（つづき２）

⑤より，S は，$(p,\ q)=(p_0,\ -q_0),\ (-p_0,\ q_0)$ のとき最大となり，

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(q_0+p_0)^2$$

また，$(p,\ q)=(p_0,\ q_0),\ (-p_0,\ -q_0)$ のとき最小となり，

$$m=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(q_0-p_0)^2$$

よって，$M=4m$ となるとき，

$$(q_0+p_0)^2=4(q_0-p_0)^2$$

$$q_0+p_0=2(q_0-p_0) \qquad (0<p_0<q_0 \text{ より})$$

$$q_0=3p_0$$

$$\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}=3\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$$

$$\frac{1}{3k-\sqrt{3}}=\frac{9}{3k+\sqrt{3}}$$

$$3k+\sqrt{3}=9(3k-\sqrt{3})$$

$$k=\frac{5\sqrt{3}}{12} \qquad \cdots(\text{答})$$

© 河合塾　2026 年