第 1 問

(1) $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$,　$f'(\theta)=\cos\theta-1+\dfrac{\theta^2}{2}$

$f''(\theta)=-\sin\theta+\theta$,　$f'''(\theta)=-\cos\theta+1$

$f'''(\theta)\geqq 0$ なので, $f''(\theta)$ の増減は次のようになる.

θ	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'''(\theta)$		$+$		$+$	
$f''(\theta)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

よって, $f'(\theta)$ の増減は次のようになる.

θ	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(\theta)$		$-$		$+$	
$f'(\theta)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

したがって, $f'(\theta)\geqq 0$, つまり, $f(\theta)$ は単調増加であるから,

$$M=f(1)=\sin 1-\frac{5}{6},\qquad m=f(-1)=-\sin 1+\frac{5}{6}\qquad \cdots（答）$$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx$ とおくと,

$$I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cdot\cos x\ dx-\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\cdot\sin x\ dx$$

ここで,

$$\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\cdot\sin x\ dx=\Big[-\sin(\cos x)\Big]_0^{2\pi}=0$$

なので,

$$I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cdot\cos x\ dx$$

$g(x)=\sin(\cos x)\cdot\cos x$ とおくと,

$g(x+\pi)=g(x)$　　（つまり, π を周期としてもつ）

$g\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$　　（つまり, $x=\dfrac{\pi}{2}$ で対称）

が成り立つので,

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cdot\cos x\ dx$$

第 1 問　（つづき）

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $0 \leqq \cos x \leqq 1$ なので，(1) で $\theta = \cos x$ として，

$$0 \leqq f(\theta) \leqq M$$

が成り立つ．つまり，

$$0 \leqq \sin(\cos x) - \cos x + \frac{\cos^3 x}{6} \leqq M$$

$$\cos x - \frac{\cos^3 x}{6} \leqq \sin(\cos x) \leqq M + \cos x - \frac{\cos^3 x}{6}$$

$\cos x$ $(\geqq 0)$ をかけて，

$$\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} \leqq \sin(\cos x)\cos x \leqq M\cos x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6}$$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6}\right) dx \leqq \frac{1}{4}I \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} M\cos x \ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6}\right) dx \quad \cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{(1-\sin^2 x)\cos^2 x}{6}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{6}\cos^2 x + \frac{\sin^2 2x}{24}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{6}\frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{1}{24}\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{5}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \ dx - \frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \ dx + \frac{7}{32}\pi \\
&= \frac{5}{12}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{48}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{7}{32}\pi \\
&= \frac{7}{32}\pi
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\cos x \ dx = M[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = M$$

よって，①から，

$$\frac{7}{32}\pi \leqq \frac{1}{4}I \leqq \frac{7}{32}\pi + M$$

$$\frac{7}{8}\pi \leqq I \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終り）

第2問

(1) 相異なる3点の選び方の総数は${}_{15}\mathrm{C}_3$通りであり，これらはすべて同様に確からしい．このうち3点が三角形の3頂点とならない，すなわち，同一直線上に並ぶ場合の数を求める．

選ばれた3点を$\mathrm{A}_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3)$とする．ただし，$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$とする．

(i) $x_1 = x_2$のとき，3点はy軸に平行な直線上に並ぶので，$x_1 = x_2 = x_3$である．x_1の値は$1, 2, 3$の3通り，整数の組(y_1, y_2, y_3)は1以上5以下の相異なる3つの整数の組であるから，その場合の数は$3 \cdot {}_5\mathrm{C}_3 = 30$通り．

(ii) $x_1 \neq x_2$のとき，直線$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$の傾きをk（kは整数）とおくと，3点の座標は

$$\mathrm{A}_1(1, a),\ \mathrm{A}_2(2, a+k),\ \mathrm{A}_3(3, a+2k)$$

となる．$1 \leqq y_i \leqq 5$ $(i=1,2,3)$より，$1 \leqq a \leqq 5$かつ$1 \leqq a+2k \leqq 5$．
これを満たす整数の組(a, k)は

$$(a,k) = (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,-1), (3,0), (3,1),$$
$$(4,-1), (4,0), (5,-2), (5,-1), (5,0)$$

の13通り．

以上より，3点が同一直線上に並ぶ確率$1-p_5$は，

$$1 - p_5 = \frac{30+13}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{43}{455}$$

であり，これより$p_5 = \dfrac{412}{455}$である．　　　$\cdots$(答)

(2) 相異なる3点の選び方の総数は${}_{6m}\mathrm{C}_3$通りであり，これらはすべて同様に確からしい．(1)と同様に，3点が同一直線上に並ぶ場合の数を求める．

(i) $x_1 = x_2$のとき，3点はy軸に平行な直線上に並ぶので，$x_1 = x_2 = x_3$である．x_1の値は$1, 2, 3$の3通り，整数の組(y_1, y_2, y_3)は1以上$2m$以下の相異なる3つの整数の組であるから，その場合の数は

$$3 \cdot {}_{2m}\mathrm{C}_3 = 2m(2m-1)(m-1)\text{通り．}$$

(ii) $x_1 \neq x_2$のとき，直線$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$の傾きをk（kは整数）とおくと，3点の座標は

$$\mathrm{A}_1(1, a),\ \mathrm{A}_2(2, a+k),\ \mathrm{A}_3(3, a+2k)$$

となる．$1 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \leqq 2m$または$2m \geqq y_1 \geqq y_2 \geqq y_3 \geqq 1$であるから，

$$1 \leqq a \leqq 2m \text{ かつ } 1 \leqq a+2k \leqq 2m. \cdots ①$$

第2問　（つづき1）

$k>0$ のとき，① より $1 \leqq a \leqq 2(m-k)$ ゆえ，これを満たす整数 a の個数は

$$\begin{cases} 2(m-k) & (k<m \text{ のとき}), \\ 0 & (k \geqq m \text{ のとき}). \end{cases}$$

$k<0$ のとき，① より $1-2k \leqq a \leqq 2m$ ゆえ，これを満たす整数 a の個数は

$$\begin{cases} 2(m+k) & (k>-m \text{ のとき}), \\ 0 & (k \leqq -m \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これは k を $-k$ にとりかえた場合に等しい．

$k=0$ のとき，① を満たす整数 a の個数は $2m$ である．よって，① を満たす整数の組 (a,k) の総数は

$$2m+2\sum_{k=1}^{m-1} 2(m-k) = 2m+2m(m-1) = 2m^2. \cdots ②$$

以上より，3 点が同一直線上に並ぶ確率 $1-p_{2m}$ は

$$1-p_{2m} = \frac{2m(2m-1)(m-1)+2m^2}{{}_{6m}\mathrm{C}_3} = \frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}$$

であり，これより $p_{2m} = \dfrac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$ である．　$\cdots$(答)

【(2) の場合分け (ii) における別解1】

(ii) $x_1 \neq x_2$ のとき，$x_1=1, x_2=2, x_3=3$，$y_2-y_1=y_3-y_2 \cdots ③$ である．③ $\iff y_2 = \dfrac{y_1+y_3}{2}$ であるから，これを満たす整数 $1 \leqq y_i \leqq 2m$ $(i=1,2,3)$ が存在するのは，$1 \leqq y_i \leqq 2m$ $(i=1,3)$ かつ y_1, y_3 の偶奇が一致するときである．

y_1 が奇数のとき，$y_i = 1,3,\ldots,2m-1$ $(i=1,3)$ であり，③ から y_1, y_3 を定めれば y_2 は一意に定まるので，③ を満たす整数の組 (y_1,y_2,y_3) は m^2 通り．

y_1 が偶数のとき，$y_i = 2,4,\ldots,2m$ $(i=1,3)$ であり，同様に ③ を満たす整数の組 (y_1,y_2,y_3) は m^2 通り．

ゆえに，③ および $1 \leqq y_i \leqq 2m$ $(i=1,2,3)$ を満たす整数の組 (y_1,y_2,y_3) は $2m^2$ 通りとなり ② を得る．

第２問　（つづき２）

【(2) の場合分け (ii) における別解２】

(ii) $n=2m$ のときに３点が同一直線上に並び，かつ $x_1 \neq x_2$ となる３点の選び方の総数を q_m とおく．数列 $\{q_m\}$ の漸化式を求める．

$x_1 \neq x_2$ のとき，$x_1=1, x_2=2, x_3=3$，$y_2-y_1=y_3-y_2 \cdots$ ③ である．

$$y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \text{ または } y_1 \geqq y_2 \geqq y_3$$

となることに注意すると，$2 \leqq y_i \leqq 2m-1 \ (i=1,3)$ であるとき $2 \leqq y_2 \leqq 2m-1$ は成り立つので，この場合に ③ を満たす整数の組 (y_1, y_2, y_3) の総数は q_{m-1} 通りである．

また $y_1=1$ となる ③ を満たす整数の組 (y_1, y_2, y_3) は

$$(y_1, y_2, y_3)=(1, k, 2k-1) \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

の m 通りである．直線 $x=2$ および $y=m+\dfrac{1}{2}$ に関する対称性より，$y_3=1$, $y_1=2m$ および $y_3=2m$ なる ③ を満たす整数の組 (y_1, y_2, y_3) もそれぞれ m 通りずつある．このうち，$y_1=y_3=1$ および $y_1=y_3=2m$ の場合のみそれぞれ１通りずつ重複があるので，$y_1=1$ または $y_3=1$ または $y_1=2m$ または $y_3=2m$ なる ③ を満たす整数の組 (y_1, y_2, y_3) は $4m-2$ 通り．

以上より，

$$q_m = q_{m-1}+(4m-2) \quad (m=2, 3, \ldots).$$

また，$q_1=2$ より $m \geqq 2$ ならば

$$\begin{aligned} q_m &= q_1+\sum_{k=1}^{m-1}(4k+2) \\ &= 2+2(m^2-1)=2m^2 \end{aligned}$$

となり ② を得る．

第３問

(1)　Gが三角形PQRの重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$.

さらに，M は線分 PQ の中点より，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

P，Q は xy 平面上にあるから，線分 PQ の中点 M も xy 平面上にあるので，$\mathrm{M}(X,\ Y,\ 0)$ とおけて，このことと $\mathrm{G}(2,\ 0,\ 1)$，および，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，

$$\mathrm{R}\,(6-2X,\ -2Y,\ 3). \qquad \cdots ①$$

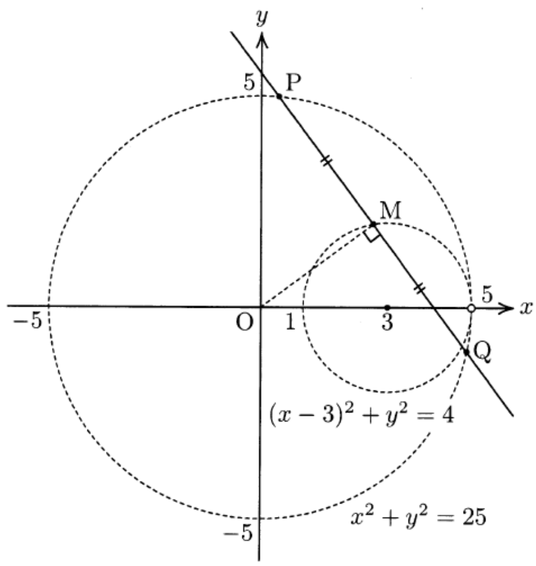
R は $S: x^2+y^2+z^2=25$ 上にあるので，$(6-2X)^2+(-2Y)^2+3^2=25$，すなわち，

$$(X-3)^2+Y^2=4. \qquad \cdots ②$$

以下，xy 平面での議論とする．P，Q は，S と xy 平面が交わってできる円 $x^2+y^2=25$ 上の異なる 2 点なので，線分 PQ の中点 M は円 $x^2+y^2=25$ の内部にある．逆に，円 $(x-3)^2+y^2=4$ 上の点で，円 $x^2+y^2=25$ の内部にある点 M に対して，直線 OM に垂直で M を通る直線と円 $x^2+y^2=25$ の交点は 2 つあり，それらを P，Q とすると，M は線分 PQ の中点となる．

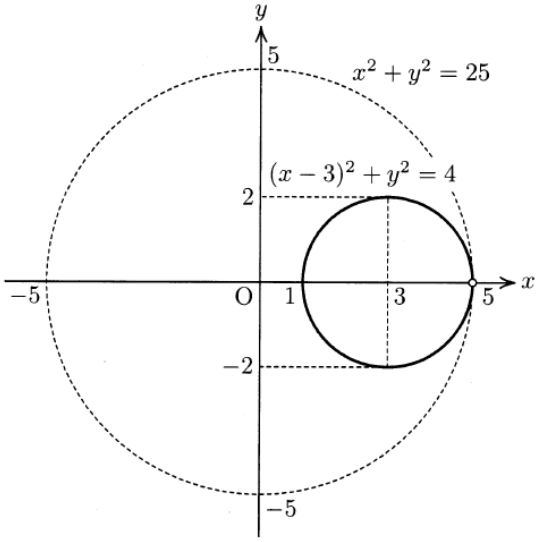
よって，円 $(x-3)^2+y^2=4$ 上の点で，線分 PQ の中点 M になりうる点の存在する範囲は

$$円\ x^2+y^2=25\ の内部. \qquad \cdots ③$$



第３問（つづき１）

つまり，②，③より，M の軌跡は xy 平面上の円 $(x-3)^2+y^2=4$ の点 $(5,\ 0)$ 以外の部分であり，xy 平面上で，次の図の太線部分のようになる．



$\cdots$(答)

なお，①より，R は xy 平面上にないので，P，Q，R は確かに相異なる 3 点になっている．さらに，P，Q，R は S 上にあるから，三角形 PQR は確かに存在する．

(2)　(1) の結果より，$\mathrm{M}(3+2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ とおける．

このことと OM⊥PQ より，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(3+2\cos\theta,\ 2\sin\theta)(\neq(0,\ 0))$ は直線 PQ の法線ベクトルの 1 つであるから，直線 PQ の方程式は

$$(3+2\cos\theta)\{x-(3+2\cos\theta)\}+(2\sin\theta)(y-2\sin\theta)=0. \qquad \cdots④$$

P，Q は円 $x^2+y^2=25$ 上の異なる 2 点なので，線分 PQ が通過する範囲は，直線 PQ が通過する範囲と領域

$$x^2+y^2 \leqq 25 \qquad \cdots⑤$$

の共通部分である．

よって，線分 PQ が通過する範囲は，

④ を満たす θ が $0<\theta<2\pi$ の範囲にある　$\cdots$⑥

ような点 $(x,\ y)$ のうち，⑤を満たすものの集合である．

ここで，④において $\theta=0$ とすると，$x=5$ となり，さらに⑤より，$(x,\ y)=(5,\ 0)$ となる．逆に，$(x,\ y)=(5,\ 0)$ のとき，④は $\cos\theta=1$ となるので，⑥は成り立たない．

第３問 (つづき２)

したがって，⑥ となるためには

$$(x,\ y) \neq (5,\ 0) \qquad \cdots⑦$$

が必要である．

よって，⑦ のもとで，⑥ となる条件は，

④ を満たす θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にある　$\cdots⑥'$

ことになる．

また，④ より，$y\sin\theta + (x-6)\cos\theta = \dfrac{13-3x}{2}$ であり，点 $(x,\ y)$ が ⑤ を満たすことから $(x,\ y) \neq (6,\ 0)$ なので，④ は，$\sqrt{y^2+(x-6)^2}\sin(\theta+\alpha) = \dfrac{13-3x}{2}$，すなわち，

$$\sin(\theta+\alpha) = \frac{13-3x}{2\sqrt{y^2+(x-6)^2}}$$

と書ける．なお，α は $\cos\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{y^2+(x-6)^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{x-6}{\sqrt{y^2+(x-6)^2}}$ を満たす角である．

したがって，$⑥'$ となる条件は，$\left|\dfrac{13-3x}{2\sqrt{y^2+(x-6)^2}}\right| \leqq 1$，すなわち，

$$\left\{\frac{13-3x}{2\sqrt{y^2+(x-6)^2}}\right\}^2 \leqq 1$$

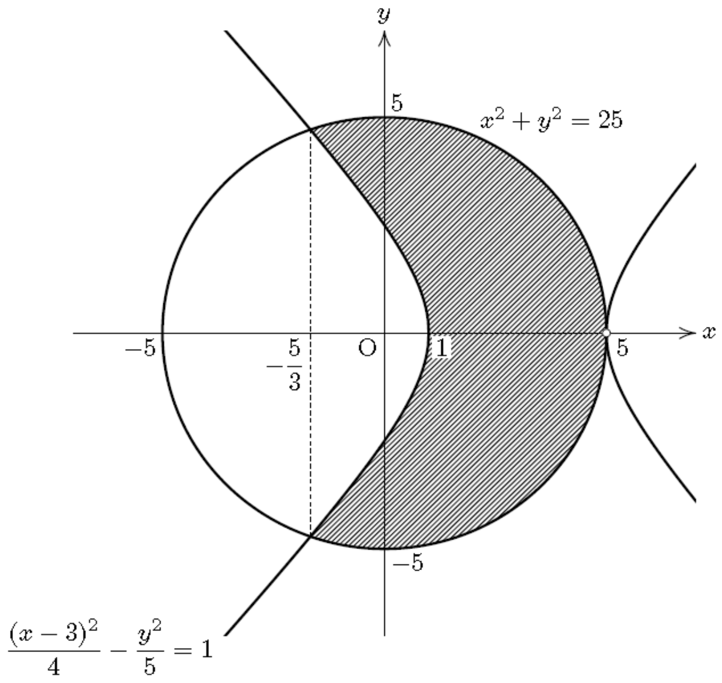
となることであり，これを整理すると，

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} \leqq 1 \qquad \cdots⑧$$

となる．

⑤，⑦，⑧ より，xy 平面上で，線分 PQ が通過する範囲は，次の図の斜線部分．境界は点 $(5,\ 0)$ は含まず，それ以外はすべて含む．

第３問 (つづき３)



$\cdots$(答)

【(2) の線分 PQ が通過する範囲を図示する直前までの別解】

M$(X,\ Y)$ とおくと，(1) の結果より，

$$(X,\ Y) \neq (5,\ 0) \qquad \cdots ④$$

かつ

$$(X-3)^2+Y^2=4 \qquad \cdots ⑤$$

であり，さらに，OM$\perp$PQ より，直線 PQ の方程式は

$$X(x-X)+Y(y-Y)=0 \qquad \cdots ⑥$$

となる．

また，P，Q は円 $x^2+y^2=25$ 上の異なる 2 点なので，線分 PQ が通過する範囲は，直線 PQ が通過する範囲と領域

$$x^2+y^2 \leqq 25 \qquad \cdots ⑦$$

の共通部分である．

よって，線分 PQ が通過する範囲は，

④，⑤，⑥，⑦ をすべて満たす実数の組 $(X,\ Y)$ が存在する　　$\cdots(*)$

ような点 $(x,\ y)$ の集合である．

第３問（つづき４）

⑥を変形すると，

$$\left(X-\frac{x}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{4}. \qquad \cdots⑥'$$

ここで，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ とすると，⑥$'$ から $(X,\ Y)=(0,\ 0)$ となるが，これは⑤を満たさない．

したがって，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ であり，このとき，⑥$'$ は，XY 平面上において，円を表す．

⑤の表す円と⑥$'$の表す円が共有点をもつための条件は，

$$\left|2-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right| \leqq \sqrt{\left(\frac{x}{2}-3\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2} \leqq 2+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \qquad \cdots⑧$$

であり，⑧の各辺はいずれも 0 以上なので，⑧は

$$\left|2-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^2 \leqq \left(\frac{x}{2}-3\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leqq \left(2+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^2$$

と同値である．

これを整理すると，

$$-2\sqrt{x^2+y^2} \leqq 5-3x \leqq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

であり，これは

$$(5-3x)^2 \leqq (2\sqrt{x^2+y^2})^2$$

と同値である．

さらに，$(5-3x)^2 \leqq (2\sqrt{x^2+y^2})^2$ を変形すると，

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1.$$

これは $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ を満たしている．

また，$(X,\ Y)=(5,\ 0)$ のとき，⑤，⑥，⑦をすべて満たす組 $(x,\ y)$ は $(x,\ y)=(5,\ 0)$ のみである．逆に，$(x,\ y)=(5,\ 0)$ のとき，⑤，⑥，⑦をすべて満たす組 $(X,\ Y)$ は $(X,\ Y)=(5,\ 0)$ のみとなるから，$(x,\ y)=(5,\ 0)$ は $(*)$ を満たさない．

以上より，xy 平面上で，線分 PQ が通過する範囲は，

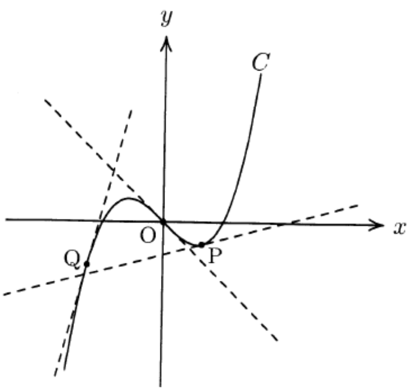
$$x^2+y^2 \leqq 25 \ \text{かつ}\ \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1 \ \text{かつ}\ (x,\ y)\neq(5,\ 0)$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の集合である．

（(2) の線分 PQ が通過する範囲を図示する直前までの別解終り）

第 4 問

(1)　$f(x)=x^3-kx$ とおき，$\mathrm{P}\big(p, f(p)\big)$，$\mathrm{Q}\big(q, f(q)\big)$（$p, q$ は 0 でない実数）とおくと，C の O, P, Q における接線の傾きはそれぞれ，$f'(0), f'(p), f'(q)$ であり，



$$f'(x)=3x^2-k$$

より，

$$f'(0)=-k,\ f'(p)=3p^2-k,\ f'(q)=3q^2-k.$$

ここで，$\tan\alpha=-k$ とおくとき，P, Q の対称性と条件(*)より，

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=f'(p),\ \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=f'(q) \qquad \cdots①$$

を満たす 0 でない異なる実数 p, q が存在する条件を考えればよく，①を整理して，

$$\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=3p^2-k,\ \frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=3q^2-k.$$

$$\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}=3p^2-k,\ \frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}=3q^2-k.$$

$$p^2=\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}},\ q^2=\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}. \qquad \cdots②$$

$\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}\neq\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}$ より，$p\neq q$ であることに注意すると，

$$\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}>0,\ \frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}>0.$$

$$k>\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(答)$$

大問４（つづき１）

(2)　3接線によって囲まれる三角形は正三角形であるから，$M=4m$ となる条件は，面積が最大の正三角形と最小の正三角形の相似比が 2：1 となることである．

C の O における接線 l_{O} の方程式は，

$$y=-kx.$$

C の P における接線 l_{P} の方程式は，

$$y=(3p^2-k)(x-p)+p^3-kp.$$
$$y=(3p^2-k)x-2p^3.$$

よって，l_{O} , l_{P} の交点の座標は，

$$\left(\frac{2}{3}p\,,-\frac{2}{3}kp\right).$$

同様に，C の Q における接線 l_{Q} と l_{O} の交点の座標は，

$$\left(\frac{2}{3}q\,,-\frac{2}{3}kq\right).$$

よって，正三角形の一辺の長さを L とおくと，

$$L=\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}.$$

ここで，$k>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のもとで，②より，

$$p=\pm\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}},\ \ q=\pm\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}$$

であるから，L の最大値を L_M，最小値を L_m とおくと，

$$L_M=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}\right)\sqrt{1+k^2},$$

$$L_m=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}-\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}\right)\sqrt{1+k^2}\,.$$

$L_M=2L_m$ となる k を求めればよく，

大問４（つづき２）

$$\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}=2\left(\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}-\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}\right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{3k+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3k-\sqrt{3}}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{3k-\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3k+\sqrt{3}}}\right).$$

$$\frac{3}{\sqrt{3k+\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3k-\sqrt{3}}}.$$

$$9\left(3k-\sqrt{3}\right)=3k+\sqrt{3}.$$

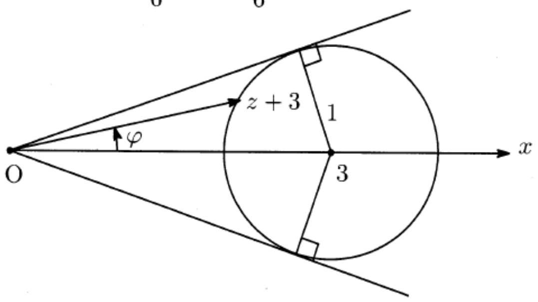
$$k=\frac{5}{12}\sqrt{3}.\quad\left(k>\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ を満たす}\right)\qquad\cdots(\text{答})$$

第５問

(1)　$z+3$ は点 3 を中心とする半径 1 の円周を描く．$\arg(z+3)=\varphi \quad (-\pi<\varphi\leqq\pi)$ とおく．図の直角三角形より $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ で，

$$-\frac{1}{3}\leqq\sin\varphi\leqq\frac{1}{3} \qquad \cdots ①$$

となる．$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$ であるから φ の変域は $-\dfrac{\pi}{6}<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$ に含まれる．



偏角の性質より $\arg\{(z+3)^3\}=3\varphi+2\pi k$ (k は整数) である．

3φ の変域は $-\dfrac{\pi}{2}<3\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ に含まれるので，$\sin\theta$ すなわち $\sin3\varphi$ は単調増加である．

$\sin\varphi=\dfrac{1}{3}$ のとき，3 倍角の公式より，$\sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=\dfrac{23}{27}$ となる．

$\sin\varphi=-\dfrac{1}{3}$ のときは $\sin3\varphi=-\dfrac{23}{27}$ であるから，

$$-\frac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\frac{23}{27}. \qquad \cdots (答)$$

(2)　$z-\alpha$ は点 $-\alpha$ を中心とする半径 1 の円周を描く．これを記号 $\mathrm{C}_{-\alpha}$ で表すことにする．

複素数平面上で 3 乗すると正の実数になる複素数 z は，$\arg(z)=0,\pm\dfrac{2\pi}{3}$ で表される 3 本の半直線 (端点 0 を除く) を描く (図 1)．

$\mathrm{C}_{-\alpha}$ が図 1 の図形と共有点を持つときの中心 $-\alpha$ の範囲は，図 1 の半直線を中心線とする，中心線からの幅が 1 の帯 A となる (図 2, 図 3)

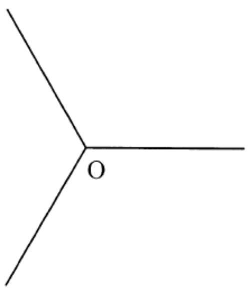


図 1

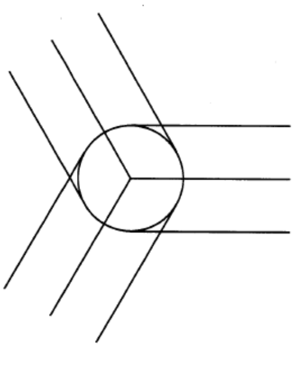


図 2

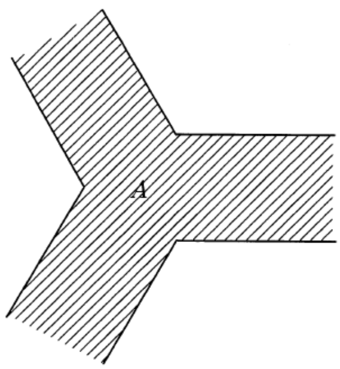


図 3

複素数平面上で 3 乗すると負の実数になる複素数 z は，$\arg(z)=\pi,\pm\dfrac{\pi}{3}$ で表される 3 本の半直線 (端点 0 を除く) を描く (図 4)．

第５問（つづき）

$C_{-\alpha}$ が図 4 の図形と共有点を持つときの中心 $-\alpha$ の範囲は, 図 4 の図形を中心線とする, 中心線からの幅が 1 の帯 B となる (図 5, 図 6)

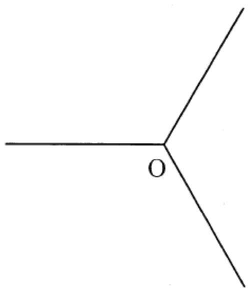


図 4

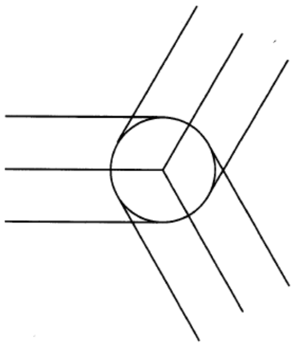


図 5

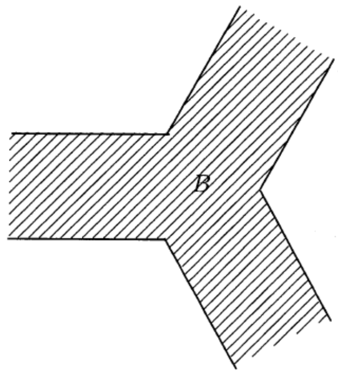


図 6

図 3 と図 6 の共通部分が点 $-\alpha$ が動きうる範囲である. これを原点に関して点対称移動したもの (移動する前と同じになる) が点 $\mathrm{R}(\alpha)$ の動きうる範囲である (図 7).

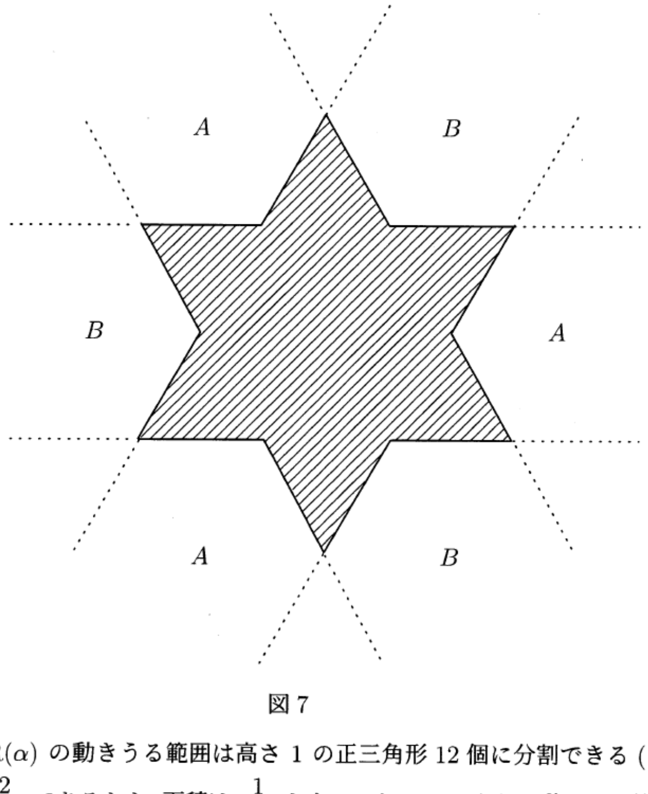


図 7

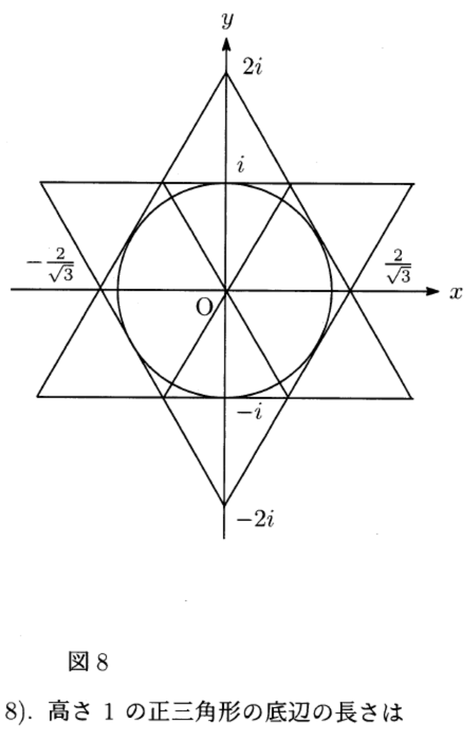


図 8

$\mathrm{R}(\alpha)$ の動きうる範囲は高さ 1 の正三角形 12 個に分割できる (図 8). 高さ 1 の正三角形の底辺の長さは $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから, 面積は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる. よって, $\mathrm{R}(\alpha)$ の動きうる範囲の面積は,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times 12 = 4\sqrt{3}. \qquad \cdots (\text{答})$$

第６問

(1) $2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7^1$ より, 2800 の正の約数は, $0 \leqq a \leqq 4, 0 \leqq b \leqq 2, 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす整数 a, b, c を用いて, $2^a \times 5^b \times 7^c$ と表される．これは mod 3 で $(-1)^a \times (-1)^b \times 1^c = (-1)^{a+b}$ と合同である．
よって, 2800 の正の約数で 3 で割って 1 余るものは, a, b の偶奇が一致するものであるから,

$$f(2800) = 3 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 \times 2 = 16. \qquad \cdots (答)$$

また, 2800 の正の約数で 3 で割って 2 余るものは, a, b の偶奇が一致しないものであるから,

$$g(2800) = 3 \times 1 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 14. \qquad \cdots (答)$$

(2)

$$f(1) = 1,\ g(1) = 0 \qquad \cdots ①$$

より, $n = 1$ のとき, $f(n) \geqq g(n)$ が成り立つ.
以下では $n \geqq 2$ とする．このとき, 3 で割って 1 余る素数 $p_1, \cdots, p_l$, 3 で割って 2 余る素数 $q_1, \cdots, q_m$, 正の整数 $a_1, \cdots, a_l, b_1, \cdots, b_m$ および 0 以上の整数 c を用いて,

$$n = (p_1^{a_1} \times \cdots \times p_l^{a_l}) \times (q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \times 3^c$$

と素因数分解される．ただし, l, m は 0 以上の整数であり, l, m が 0 であるときは, 対応する積はすべて 1 であるとみなす.
n の正の約数は

$$(p_1^{a_1} \times \cdots \times p_l^{a_l}\text{の正の約数}) \times (q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}\text{の正の約数}) \times (3^c\text{の正の約数})$$

の形で表される．$p_1^{a_1} \times \cdots \times p_l^{a_l}$ の正の約数は 3 で割って 1 余り, 3^c の正の約数は 3 の倍数または 1 である．よって, $p_1^{a_1} \times \cdots \times p_l^{a_l}$ の正の約数 1 つと, $q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}$ の正の約数で 3 で割って 1 余るものを 1 つ定めるごとに, n の正の約数で 3 で割って 1 余るものが 1 つ定まり, またこれで n の正の約数で 3 で割って 1 余るものが尽くされる.
以上より,

$$f(n) = (a_1 + 1) \cdots (a_l + 1) \times f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \qquad \cdots ②$$

であり, 同様に考えて

$$g(n) = (a_1 + 1) \cdots (a_l + 1) \times g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \qquad \cdots ③$$

である.
よって, $f(n) \geqq g(n)$ を示すには,

$$f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \geqq g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})$$

を示せばよい．この不等式を m についての命題とみて $P(m)$ とおく．①より $P(0)$ は成り立つ．1 以上の整数 m で $P(m)$ が成り立つことを, m についての数学的帰納法で示す.

(I) $P(1)$ が成り立つことを示す.
$q_1^{b_1}$ の正の約数は $q_1^{\beta} (0 \leqq \beta \leqq b_1)$ と表され, β が偶数であるとき $q_1^{\beta} \equiv (-1)^{\beta} = 1 \pmod 3$, β が奇数であるとき $q_1^{\beta} \equiv (-1)^{\beta} = -1 \pmod 3$ となる．したがって,

$$f(q_1^{b_1}) - g(q_1^{b_1}) = \begin{cases} \left(\dfrac{b_1}{2} + 1\right) - \dfrac{b_1}{2} = 1 & (b_1\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{b_1 + 1}{2} - \dfrac{b_1 + 1}{2} = 0 & (b_1\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

であるから, $P(1)$ は成り立つ.

第 6 問 (つづき 1)

(2) (つづき)

(II) m を 1 以上の整数とし, $P(m)$ が成り立つと仮定する.

$P(m+1)$ について考える. $q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \times q_{m+1}^{b_{m+1}}$ の正の約数は,

$$(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \text{の正の約数}) \times (q_{m+1}^{b_{m+1}} \text{の正の約数})$$

の形で表される. これが 3 で割って 1 余るのは,

$$(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \text{の正の約数}) \equiv (q_{m+1}^{b_{m+1}} \text{の正の約数}) \equiv 1 \pmod 3$$

または

$$(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \text{の正の約数}) \equiv (q_{m+1}^{b_{m+1}} \text{の正の約数}) \equiv -1 \pmod 3$$

が成立するときであるから,

$$f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \times q_{m+1}^{b_{m+1}}) = f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})f(q_{m+1}^{b_{m+1}}) + g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})g(q_{m+1}^{b_{m+1}})$$

である. 同様に,

$$g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \times q_{m+1}^{b_{m+1}}) = f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})g(q_{m+1}^{b_{m+1}}) + g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})f(q_{m+1}^{b_{m+1}})$$

である. よって,

$$\begin{aligned} &f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \times q_{m+1}^{b_{m+1}}) - g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m} \times q_{m+1}^{b_{m+1}}) \\ &= \left\{ f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) - g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \right\} \left\{ f(q_{m+1}^{b_{m+1}}) - g(q_{m+1}^{b_{m+1}}) \right\} \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

である. ここで, $P(m)$ および $P(1)$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} &f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) - g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) \geqq 0 \\ &f(q_{m+1}^{b_{m+1}}) - g(q_{m+1}^{b_{m+1}}) \geqq 0 \end{aligned}$$

であるから, $P(m+1)$ も成り立つ.

以上 (I),(II) より, 題意が示された. (証明終り)

(3) $g(n) = 15$ のとき, $n \neq 1$ である. よって, ③の表現を用いると,

$$((a_1+1)\cdots(a_l+1), g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})) = (1,15),(3,5),(5,3),(15,1)$$

である.

(2) の証明中で, 帰納法で示す命題を「$f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) - g(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m}) = 0$ または 1」に変更することを考える. これは $m = 0, 1$ で成立し, また④の右辺の 2 項はともに 0 または 1 となるから, この命題も同様に証明できる.

以上より,

$$((a_1+1)\cdots(a_l+1), f(q_1^{b_1} \times \cdots \times q_m^{b_m})) = (1,15),(1,16),(3,5),(3,6),(5,3),(5,4),(15,1),(15,2)$$

であり, $f(n)$ は②より

$$f(n) = 15, 16, 18, 20, 30 \qquad \cdots (答)$$

となる. これらは例えば $n = 2 \times 7^{14}, 2^{30}, 2^{10} \times 7^2, 2^6 \times 7^4, 2^2 \times 7^{14}$ でそれぞれ達成される.

第 6 問 (つづき 2)

【参考】

命題「$f(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})-g(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})=0$ または 1」の証明に関しては, 次のような方針も考えられる.

$$F(x)=(1+x+\cdots+x^{b_1})(1+x+\cdots+x^{b_2})\cdots(1+x+\cdots+x^{b_m})$$

とする. $F(x)$ を展開したときの各項は, $0\leqq\beta_1\leqq b_1,\cdots,0\leqq\beta_m\leqq b_m$ をみたす整数 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ を用いて $x^{\beta_1}x^{\beta_2}\cdots x^{\beta_m}=x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m}$ とかけ, これは $q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m}$ の正の約数 $q_1^{\beta_1}\times\cdots\times q_m^{\beta_m}$ と 1 対 1 に対応する. これが $f(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})$ に寄与するのは $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m$ が偶数のときで, $g(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})$ に寄与するのは $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m$ が奇数のときである.
したがって, $f(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})$ は $F(x)$ を展開したときの偶数次の係数の和に等しく, $g(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})$ は $F(x)$ の奇数次の係数の和に等しい.
以上より,

$$f(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})-g(q_1^{b_1}\times\cdots\times q_m^{b_m})=F(-1)$$

である. ここで, $F(x)$ の各因数について,

- b_i が偶数であるとき, $(1+x+\cdots+x^{b_i})$ に $x=-1$ を代入した値は 1
- b_i が奇数であるとき, $(1+x+\cdots+x^{b_i})$ に $x=-1$ を代入した値は 0

だから, $F(-1)=0$ または 1 である. これが示したいことであった.