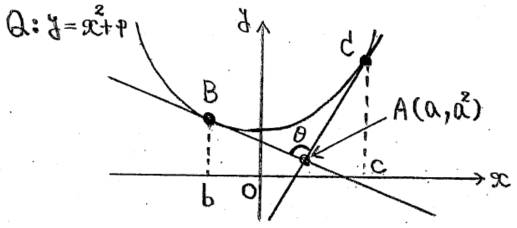
文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

1



(1) $y=x^2+p$ のとき，$y'=2x$ であるから，

点 $(t,\ t^2+p)$ における Q の接線の方程式は，

$$y=2t(x-t)+t^2+p$$
$$=2tx-t^2+p.$$

これが点 A $(a,\ a^2)$ を通る条件は，

$$a^2=2ta-t^2+p$$
$$t^2-2at+a^2-p=0.$$

$p>0$ より，

$$t=a\pm\sqrt{p}.$$

$b<c$ より，

$$b=a-\sqrt{p},\quad c=a+\sqrt{p}.\ \cdots(答)$$

(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，

$$2b\cdot 2c=-1$$
$$bc=-\frac{1}{4}.$$

(1)の結果より，

$$a^2-p=-\frac{1}{4}$$
$$p=a^2+\frac{1}{4}.\ \cdots(答)$$

(3) 点 B における Q の接線，点 C における Q の接線と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ β, γ $(0<\beta-\gamma<\pi)$ とおくと，

$$\tan\beta=2b,\quad \tan\gamma=2c.$$

$\theta=\beta-\gamma$ であるから，加法定理より，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\gamma)$$
$$=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}$$
$$=\frac{2(b-c)}{1+4bc}$$
$$=\frac{-4\sqrt{p}}{1+4(a^2-p)}\quad((1)より)$$
$$=\frac{4\sqrt{p}}{4p-4a^2-1}.\ \cdots(答)$$

(4) $\frac{\pi}{3}\leqq\theta<\pi$ のとき，

「$\frac{\pi}{3}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ または $\theta=\frac{\pi}{2}$ または $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$」

すなわち

「$\tan\theta\geqq\sqrt{3}$ または $\theta=\frac{\pi}{2}$ または $\tan\theta<0$」

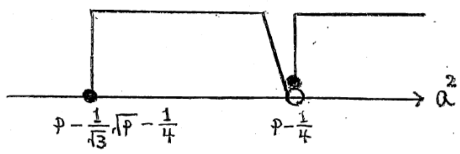
であり，(2)，(3)より，

「$\begin{cases}4p-4a^2-1>0,\\ 4\sqrt{p}\geqq\sqrt{3}(4p-4a^2-1)\end{cases}$ または $p=a^2+\frac{1}{4}$

または $4p-4a^2-1<0$」

$\Leftrightarrow$ 「$\begin{cases}a^2<p-\frac{1}{4},\\ a^2\geqq p-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{p}-\frac{1}{4}\end{cases}$ または $a^2\geqq p-\frac{1}{4}$」

$\Leftrightarrow$ 「$a^2\geqq p-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{p}-\frac{1}{4}\quad\cdots(*)$」



(*)がすべての実数 a に対して成り立つための，p の範囲は，

$$p-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{p}-\frac{1}{4}\leqq 0$$
$$\left(\sqrt{p}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{p}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\leqq 0$$
$$0<\sqrt{p}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より，

$$0<p\leqq\frac{3}{4}.\ \cdots(答)$$

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

2

$120=2^3\cdot3\cdot5$ であるから，積が120である3つの整数の組で，どの2つの整数も最大公約数が1であるものは
「$1,1,2^3\cdot3\cdot5$」，「$1,2^3,3\cdot5$」，「$1,3,2^3\cdot5$」，「$1,5,2^3\cdot3$」，「$2^3,3,5$」，すなわち，

(ア) $1,1,120$　(イ) $1,8,15$
(ウ) $1,3,40$　(エ) $1,5,24$
(オ) $8,3,5$　である．

(1) (※)かつ $abc=120$ をみたす a,b,c の3つの整数は，(ア)～(オ)のいずれかの組だから，$a\leqq b\leqq c$ を考慮して，

$(a,b,c)=(1,1,120),\ (1,8,15),$
$(1,3,40),\ (1,5,24),$
$(3,5,8).$　…(答)

(2) (※)かつ $abc=120$ をみたす組 (a,b,c) のうち，3つの整数が(ア)のものは3通り，3つの整数が(イ)，(ウ)，(エ)，(オ)のものはそれぞれ6通りずつあるから，求める個数は

$3+6\times4=27$（個）．…(答)

(3) N 以下の素数の個数は m より，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$ を正の整数，$p_1,p_2,p_3,\cdots,p_m$ を，どの2つも互いに異なる素数として，$N!$ は

$$N!=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\cdots\cdot p_m^{a_m}$$

と素因数分解でき，$q_k=p_k^{a_k}$ $(k=1,2,3,\cdots,m)$ とすると，

$$N!=q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot\cdots\cdot q_m$$

と表せる．
条件(※)より，$abc=N!$ をみたす a,b,c は，どの2つも2以上の共通の約数をもたないから，a,b,c は「$1,q_1,q_2,\cdots,q_m$ のいずれか」または，「$q_1,q_2,q_3,\cdots,q_m$ のうちの2つ以上の積」である．
よって，$q_1,q_2,q_3,\cdots,q_m$ の m 個の数を3つのグループA，B，Cに分け，分けた数の積をそれぞれ a,b,c（ただし，数が1つも分けられなかったグループは，数の積を1とする）とすれば，できる (a,b,c) の組の総数が，求める個数である．
したがって

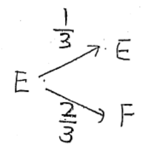
3^m（個）．…(答)

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部(人間・社会情報学科)

$\boxed{3}$

条件(*)のもとで，点Aが直線$y=x$上にある状態をE，点Aが直線$y=x+1$上 または 直線$y=x-1$上にある状態をFとおく。

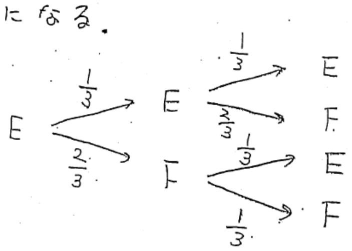
(1) $n=1$のとき，該当する推移は右のようになる。



よって，

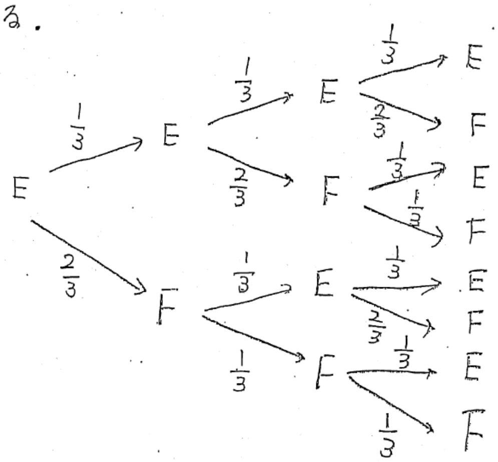
$P_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. …(答)

$n=2$のとき，該当する推移は下のようになる。



よって，$P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$. …(答)

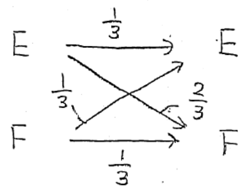
$n=3$のとき，該当する推移は下のようになる。



よって，

$$P_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{17}{27}.$$ …(答)

(2) 時刻n　　　時刻$n+1$



上の推移図より，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$ …(答)

$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$ …(答)

(3)
$$\begin{aligned}P_{n+2}&=a_{n+2}+b_{n+2}\\&=\left(\frac{1}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1}\right)+\left(\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1}\right)\\&=a_{n+1}+\frac{2}{3}b_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}+b_{n+1})+\frac{1}{3}a_{n+1}\\&=\frac{2}{3}(a_{n+1}+b_{n+1})+\frac{1}{9}(a_n+b_n)\\&=\frac{2}{3}P_{n+1}+\frac{1}{9}P_n.\end{aligned}$$ …(答)

(4) 1以上のすべての整数nに対して，

$P_n\leqq\alpha^{n-1}$ …(#)

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(Ⅰ) $n=1$のとき，$\alpha^0-P_1=1-1\geqq 0$

よって，$P_1\leqq\alpha^0$となり，(#)は成り立つ。

(Ⅱ) $n=2$のとき，

$$\alpha^1-P_2=\frac{3+3\sqrt{2}}{9}-\frac{7}{9}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{16}}{9}\geqq 0$$

よって，$P_2\leqq\alpha^1$となり，(#)は成り立つ。

(Ⅲ) $n=k,\ k+1$ $(k=1,2,3,\cdots)$のとき(#)が成り立つと仮定する。(3)より，

$$P_{k+2}=\frac{2}{3}P_{k+1}+\frac{1}{9}P_k\leqq\frac{2}{3}\alpha^k+\frac{1}{9}\alpha^{k-1}$$
$$=\alpha^{k-1}\cdot\frac{6\alpha+1}{9}$$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$であるから

$$P_{k+2}\leqq\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{9}=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2=\alpha^{k+1}$$

となり，$n=k+2$のときも(#)は成り立つ。

(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)より，1以上のすべての整数nに対して，(#)は成り立つ。(証明終り)