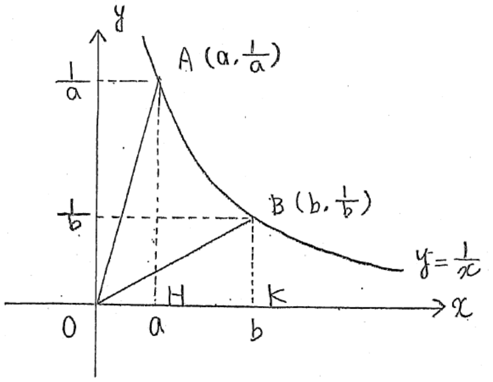
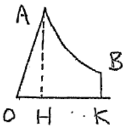
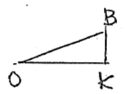
理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

1　図のようにH，Kをとるとする．



(1)　S =  — 

$$=\left(\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{a}+\int_a^b\frac{1}{x}dx\right)-\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{b}$$

$$=\left[\log x\right]_a^b$$

$$=\log\frac{b}{a}. \quad \cdots(答)$$

(2)　$\angle AOH=\alpha$，$\angle BOK=\beta$

$\left(0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{a}-0}{a-0}=\frac{1}{a^2}.$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{1}{b}-0}{b-0}=\frac{1}{b^2}.$$

$\angle BOA=\frac{\pi}{4}$ より

$$\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)$$

$$1=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$1=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$$

$$(1-a^2)b^2=1+a^2$$

$0<a<1$ より　$1-a^2>0$ であるから

$$b^2=\frac{1+a^2}{1-a^2}\ (>0).$$

$b>0$ より，

$$b=\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}. \quad \cdots(答)$$

(3)　(1)より　$S=\log\frac{b}{a}$．

$y=\log x$ は単調増加より

$\frac{b}{a}$ が最小のとき S も最小　$\cdots(*)$

であるから

$\frac{b}{a}$ の最小値を考える．

(2)より

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\frac{1+a^2}{1-a^2}}{a^2}}=\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2(1-a^2)}}.$$

$a^2=t$ とおくとき　$0<t<1$．

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{1+t}{t(1-t)}=f(t) \text{ とおく．}$$

$$f'(t)=\frac{1\cdot t(1-t)-(1+t)(1-2t)}{t^2(1-t)^2}$$

$$=\frac{t^2+2t-1}{t^2(1-t)^2}.$$

$0<t<1$ における増減は次の通り．

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$t=\sqrt{2}-1$ のとき $f(t)\ \left(=\frac{b^2}{a^2}\right)$ は最小であり，

このとき，$\frac{b}{a}\ (>0)$ も最小である．

$(*)$から

S を最小にする a の値は

$$a=\sqrt{t}=\sqrt{\sqrt{2}-1}. \quad \cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

2 (1) $O(0,0,0)$ とする。

平面 H 上の点 P は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB} \quad \cdots ①$$

と表せる。

また，直線 DE 上の点 Q は実数 u を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{ED} \quad \cdots ②$$

と表せる。

平面 H が直線 DE と共有点をもつのは，$P=Q$ となるような実数 s, t, u の組が存在するときである。

$P=Q$ のとき，①，② より $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の成分を比較して，

$$\begin{cases} 1+s+(a+1)t=-3+2u & \cdots ③ \\ s+3t=1+u & \cdots ④ \\ 3s+4t=u. & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④，⑤ より

$$s=-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}. \cdots ⑥$$

$$u=\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}. \cdots ⑦$$

⑥，⑦ を ③ に代入して

$$\left(a-\frac{9}{2}\right)t=-\frac{13}{2}. \cdots ⑧$$

$a=\frac{9}{2}$ のとき，⑧ をみたす実数 t は存在しない（不適）。

$a\neq\frac{9}{2}$ のとき，⑧ より $t=\dfrac{-13}{2a-9}. \cdots ⑨$

⑨ を ⑥，⑦ に代入することで実数 s, t, u の組が定まる。

したがって，求める a の条件は，$a\neq\frac{9}{2}$ すなわち

$$a<\frac{9}{2},\ \frac{9}{2}<a. \quad \cdots（答）$$

(2) 平面 H が線分 DE（両端を含む）と共有点をもつのは，(1) で求めた条件に加えて，② で用いた u が $0\leqq u\leqq 1$ をみたすときである。

⑦，⑨ より

$$u=\frac{-3a-19}{2a-9}.$$

$$(2a-9)u+(3a+19)=0. \cdots ⑩$$

ここで，$f(u)=(2a-9)u+(3a+19)$ とおくと，$a\neq\frac{9}{2}$ の条件下で $f(u)$ は u の1次関数。

よって u の方程式 ⑩ の解が $0\leqq u\leqq 1$ をみたすための条件は

$$f(0)f(1)\leqq 0.$$

$$(3a+19)(5a+10)\leqq 0.$$

$$-\frac{19}{3}\leqq a\leqq -2. \quad \cdots（答）$$

（これは (1) で求めた条件をみたす。）

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

$\boxed{3}$

(1) $120=2^3\cdot3\cdot5$ であり，条件(＊)かつ $abc=120$ をみたす組 (a, b, c) は，3つの数 2^3, 3, 5 を3つのグループ a, b, c に振り分けることで得られる．そのうち，$a\leqq b\leqq c$ をみたすものは次表．

a	b	c
1	1	$2^3\cdot3\cdot5$
1	3	$2^3\cdot5$
1	5	$2^3\cdot3$
1	2^3	$3\cdot5$
3	5	2^3

※数が振り分けられなかったグループの値は1

よって，求める組は

$(a, b, c)=(1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8)$. …(答)

(2) N 以下の素数の個数が m であるから，

$$N!=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdots\cdot p_m^{\alpha_m}$$

$\left(\begin{array}{l} p_1, p_2, \cdots, p_m \text{ は相異なる素数}, \\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \text{ は1以上の整数}. \end{array}\right)$

と表せる．条件(＊)かつ $abc=N!$ をみたす組 (a, b, c) は，

m 個の数 $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_m^{\alpha_m}$ を3つのグループ a, b, c に振り分けることで得られる．

※をふまえ，各数の振り分け方は3通りずつであるから，求める組の個数は，3^m. …(答)

(3) (2)で考えた 3^m 個の組は，次の3つの場合に分けられる．

(i) a, b, c のうち，二つが1で，一つが $N!$

(ii) a, b, c のうち，一つが1で，二つが1より大きい（この二つの数は相異なる）．

(iii) a, b, c の三つとも1より大きい（この三つの数は相異なる）

(i)の個数は3であり，このうち $a\leqq b\leqq c$ をみたすものの個数は1．

(ii), (iii)の個数の合計は 3^m-3 であり，これらは a, b, c の値が相異なるので，このうち $a\leqq b\leqq c$ をみたすものの個数は

$$\frac{3^m-3}{3!}=\frac{3^{m-1}-1}{2}.$$

よって，求める組の個数は

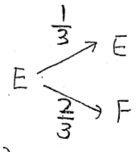
$$1+\frac{3^{m-1}-1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}. \quad \cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

4

条件(※)のもとで，点Aが直線$y=x$上にある状態をE，点Aが直線$y=x+1$上 または直線$y=x-1$上にある状態をFとおく。

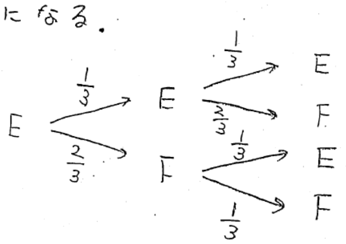
(1) $n=1$のとき，該当する推移は右のようになる。



よって，

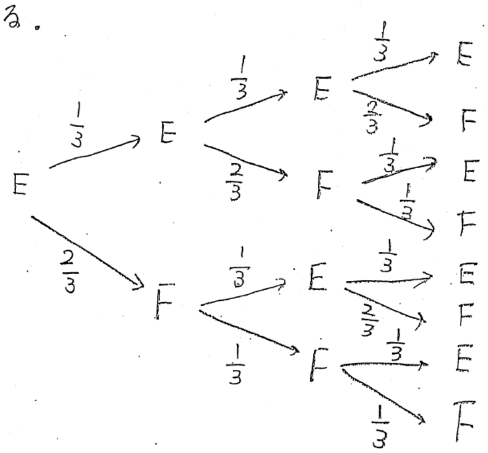
$$P_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.\quad\cdots(答)$$

$n=2$のとき，該当する推移は下のようになる。



よって，$P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}.$ …(答)

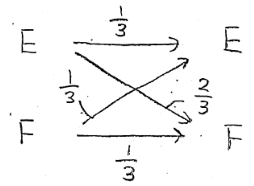
$n=3$のとき，該当する推移は下のようになる。



よって，

$$\begin{aligned}P_3&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&\quad+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\\&\quad+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{17}{27}.\end{aligned}\quad\cdots(答)$$

(2) 時刻n　　時刻$n+1$



上の推移図より，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$ …(答)

$b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$ …(答)

(3)

$$\begin{aligned}P_{n+2}&=a_{n+2}+b_{n+2}\\&=\left(\frac{1}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1}\right)+\left(\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}b_{n+1}\right)\\&=a_{n+1}+\frac{2}{3}b_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}+b_{n+1})+\frac{1}{3}a_{n+1}\\&=\frac{2}{3}(a_{n+1}+b_{n+1})+\frac{1}{9}(a_n+b_n)\\&=\frac{2}{3}P_{n+1}+\frac{1}{9}P_n.\end{aligned}\quad\cdots(答)$$

(4) 1以上のすべての整数nに対して，

$$P_n\leqq\alpha^{n-1}\quad\cdots(\#)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(I) $n=1$のとき，$\alpha^0-P_1=1-1\geqq0$

よって，$P_1\leqq\alpha^0$となり，(#)は成り立つ。

(II) $n=2$のとき，

$$\alpha^1-P_2=\frac{3+3\sqrt{2}}{9}-\frac{7}{9}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{16}}{9}\geqq0$$

よって，$P_2\leqq\alpha^1$となり，(#)は成り立つ。

(III) $n=k,\ k+1$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき (#)が成り立つと仮定する。(3)より，

$$P_{k+2}=\frac{2}{3}P_{k+1}+\frac{1}{9}P_k\leqq\frac{2}{3}\alpha^k+\frac{1}{9}\alpha^{k-1}=\alpha^{k-1}\cdot\frac{6\alpha+1}{9}$$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$であるから

$$P_{k+2}\leqq\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{9}=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2=\alpha^{k+1}$$

となり，$n=k+2$のときも(#)は成り立つ。

(I),(II),(III)より，1以上のすべての整数nに対して，(#)は成り立つ。(証明終り)