〔1〕

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$

$$f'(x)=6x^2+6x-36$$
$$=6(x+3)(x-2)$$

ここで、$f(-3)=82$, $f(2)=-43$

$f(x)$ の増減は下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	82	$\searrow$	-43	$\nearrow$

よって、

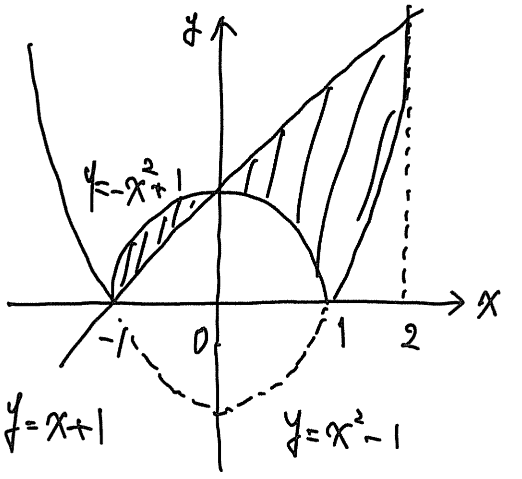
極大値 82 $(x=-3)$
極小値 -43 $(x=2)$ …(答)

(2) 直線 l の方程式は $y=x+1$

$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x+1 \end{cases}$ より $x=-1, 2$

$\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases}$ より $x=-1, 0$

これより C と l で囲まれる領域は、下図



求める面積は、

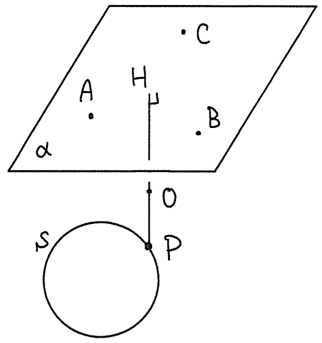
$$\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$+2\int_{-1}^{0}\{(-x^2+1)-(x+1)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$
$$-2\int_{-1}^{0}x(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2+1)^3-2\cdot\frac{1}{6}(1+1)^3+2\cdot\frac{1}{6}(0+1)^3$$

$$=\frac{13}{6}$$ …(答)

〔2〕



(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3,1,1)$

αと垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,b,c)$ とおくと，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$a+b-c=0 \quad —①$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$3a+b+c=0 \quad —②$$

①，②より

$$b=-2a,\ c=-a$$

であるから，$a=1$ とすると，$\vec{n}$ の1つとして

$$\vec{n}=(1,-2,-1)$$

がある

$\overrightarrow{OP}\parallel\vec{n}$ より，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{n}=(k,-2k,-k)$$

P は S 上にあるから

$$(k-1)^2+(-2k+1)^2+(-k+1)^2=1$$

$$3k^2-4k+1=0$$

$$(3k-1)(k-1)=0$$

$-2k\leqq-1$ より，$k\geqq\frac{1}{2}$ であるから

$$k=1$$

よって

$$P(1,-2,-1) \quad \cdots(答)$$

(2) $\overrightarrow{OP}\perp\alpha$ かつ $\overrightarrow{PH}\perp\alpha$ より，$\overrightarrow{OH}\perp\alpha$ であるから

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ —③ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ —④

③より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$3s+3t+1=0 \quad —③'$$

④より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

$$3s+11t+5=0 \quad —④'$$

③′，④′より

$$s=\frac{1}{6},\ t=-\frac{1}{2} \quad \cdots(答)$$

(3) (2)より

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

であるから

$$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}(-1,2,1)$$

よって

$$|\overrightarrow{PH}|=\frac{4}{3}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

また

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot11-3^2}$$

$$=\sqrt{6}$$

したがって，四面体 ABCP の体積は

$$\triangle ABC\times|\overrightarrow{PH}|\times\frac{1}{3}=\sqrt{6}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{8}{3} \quad \cdots(答)$$

〔3〕

(1) 背理法により示す.

$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定する.

p, q を互いに素な自然数として,

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

とおくと, $\sqrt{2}p=q$ から, $2p^2=q^2$.

これより, q^2 は偶数なので, q は偶数となる. そこで, r を自然数として

$$q=2r$$

とおくと, $2p^2=q^2$ は, $2p^2=4r^2$

すなわち, $p^2=2r^2$ となる. よって, p^2 は偶数であるから p は偶数となるが, これは, p と q が互いに素であることに矛盾する.

以上より, $\sqrt{2}$ は無理数である.

(証明終り)

(2) $\alpha=\sqrt{2}+1$, $\beta=\sqrt{2}-1$ とおく.

$$\alpha+\beta=2\sqrt{2},\quad \alpha\beta=1$$

であり,

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6.$$

ここで, $a_n=\alpha^n+\beta^n$ とすると,

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2}=2\sqrt{2}a_{n+1}-a_n \quad \cdots ①$$

が成り立つ.

また, $\alpha>0$, $\beta>0$ より,

すべての自然数 n で, $a_n>0$ … ②

が成り立つ.

ここで, すべての自然数 m に対して,

$$a_{2m-1}=A_m\sqrt{2},\quad a_{2m}=B_m$$

(A_m, B_m は自然数)

と表せることを, 数学的帰納法により示す.

(i) $m=1$ のとき,

$a_1=2\sqrt{2}$, $a_2=6$ であるから成り立つ.

(ii) $m=k$ のとき成り立つと仮定する.

$$a_{2k-1}=A_k\sqrt{2},\quad a_{2k}=B_k.$$

(A_k, B_k は自然数)

このとき, ①より,

$$a_{2k+1}=2\sqrt{2}a_{2k}-a_{2k-1}$$
$$=(2B_k-A_k)\sqrt{2},$$

$$a_{2k+2}=2\sqrt{2}a_{2k+1}-a_{2k}$$
$$=2\sqrt{2}(2B_k-A_k)\sqrt{2}-B_k$$
$$=7B_k-4A_k$$

であるから, ②と合わせて, $m=k+1$ のときも成り立つ.

以上より, すべての自然数 m で成り立つ.

ここで, (1)より, $\sqrt{2}$ は無理数なので, a_{2m-1} は整数でない.

したがって, $a_n=\alpha^n+\beta^n$ が整数となるための, n がみたすべき必要十分条件は,

n が偶数であること. …(答)

〔4〕

(1)

p_1 は，3回硬貨を投げたとき，左から1，2，3番目の玉がすべて黒である確率である．

よって，

$$p_1 = (3\text{回とも裏が出る確率}) = (1-r)^3 \quad \cdots(\text{答})$$

p_2 は，4回硬貨を投げたとき，左から2，3，4番目の玉がすべて黒である確率である．

1回目に表が出ると，左から2番目の玉は白となる．

よって，

$$p_2 = (4\text{回とも裏が出る確率}) = (1-r)^4 \quad \cdots(\text{答})$$

(2)

左から1番目の玉が黒であるから，1回目は裏が出る．

その後，$n+1$ 回硬貨を投げて，1番目を除いて，左から $n-1$, n, $n+1$ 番目の玉がすべて黒となる．

よって，求める確率は，$(1-r)p_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ …(答)

(3)

$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から n, $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒となるのは，次のいずれかの場合で，互いに排反である．

ア) 1回目が表で，その後 n 回硬貨を投げて，1，2番目を除き，左から，$n-2$, $n-1$, n 番目の玉がすべて黒となるとき

イ) 1回目が裏で，その後 $n+1$ 回硬貨を投げて，1番目を除き，左から $n-1$, n, $n+1$ 番目の玉がすべて黒となるとき

よって，$n \geqq 3$ のとき，

$p_n = r p_{n-2} + (1-r)p_{n-1}$ より，

$$p_n = (1-r)p_{n-1} + r p_{n-2} \quad \cdots ① \quad \cdots(\text{答})$$

(4)

①は次の2通りに変形できる．

$$\begin{cases} p_n - p_{n-1} = -r(p_{n-1} - p_{n-2}) & \cdots ② \\ p_n + r p_{n-1} = p_{n-1} + r p_{n-2} & \cdots ③ \end{cases}$$

②より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= (p_2 - p_1)(-r)^{n-1} \\ &= (1-r)^3(-r)^n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} + r p_n &= p_2 + r p_1 \\ &= (1-r)^3 \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

⑤－④より，

$$(1+r)p_n = (1-r)^3\{1-(-r)^n\}$$

よって，

$$p_n = \frac{(1-r)^3\{1-(-r)^n\}}{1+r} \quad \cdots(\text{答})$$