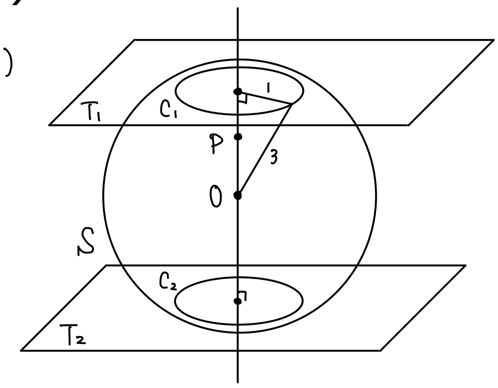
〔1〕

(1)



直線OP上の点をQとすると，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} = (k,\ 0,\ \sqrt{3}k)$$

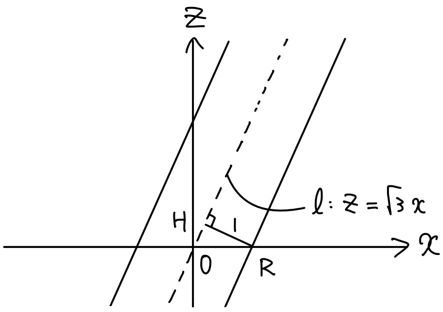
$|\overrightarrow{OQ}| = 2\sqrt{2}$ より

$$k^2 + (\sqrt{3}k)^2 = 8$$
$$k^2 = 2$$
$$k = \pm\sqrt{2}$$

よって，C_1，C_2 の中心の座標は，それぞれ

$(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{6})$，$(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{6})$ …(答)

(2)



xy 平面上の点 $R(X, Y, 0)$ とし，xz 平面における直線 $\ell : z = \sqrt{3}x$ 上の点を実数 t を用いて $H(t, 0, \sqrt{3}t)$ とする

R が求める曲線上にある条件は

$$\begin{cases} |\overrightarrow{RH}| = 1, \\ \overrightarrow{RH} \perp \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-X)^2 + (-Y)^2 + (\sqrt{3}t)^2 = 1, \\ t - X + 3t = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} (t-X)^2 + Y^2 + 3t^2 = 1, \\ t = \dfrac{X}{4} \end{cases}$$

を満たす t が存在することである

よって

$$\left(\frac{X}{4} - X\right)^2 + Y^2 + 3\cdot\left(\frac{X}{4}\right)^2 = 1$$
$$\frac{X^2}{\frac{4}{3}} + Y^2 = 1$$

このとき

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq X \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

であるから

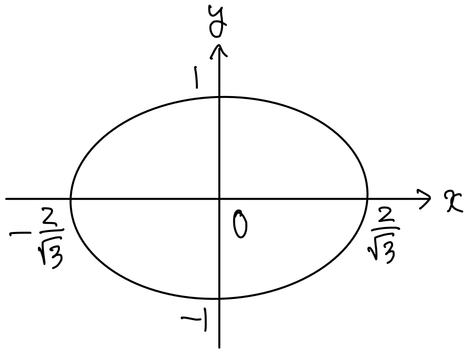
$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

となり，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ を満たす．

したがって，求める切り口の曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + y^2 = 1,\ z = 0 \quad \cdots(\text{答})$$

であり，次図のようになる



…(答)

© 河合塾2026年

〔2〕

(1)　$z = t + ti \ (t \neq 0)$ を

$w = \dfrac{z^2+1}{z}$ に代入すると、

$$w = \left(t + \frac{1}{2t}\right) + \left(t - \frac{1}{2t}\right)i$$

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2t} \\ y = t - \dfrac{1}{2t} \end{cases}$$ とおく。

$x + y = 2t$，$x - y = \dfrac{1}{t}$ より

t を消去すると，$x^2 - y^2 = 2$（双曲線）

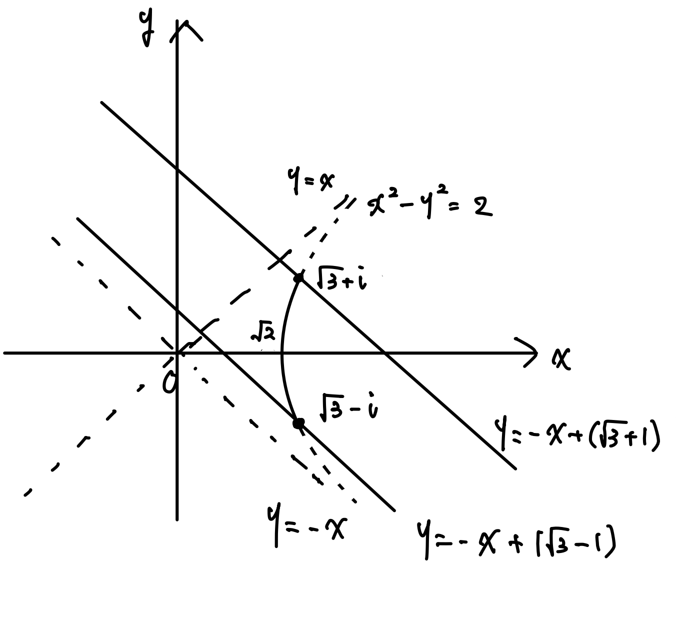
ここで，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ より，

$2 \cdot \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq x + y \leqq 2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

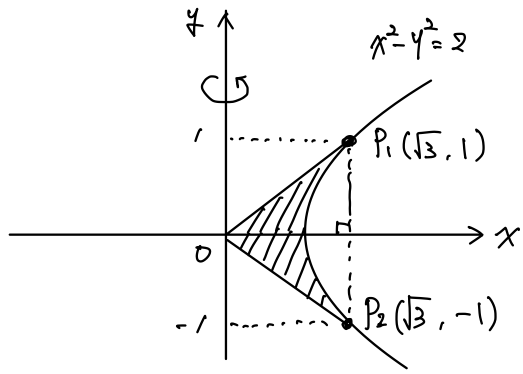
となり，

$-x + (-1+\sqrt{3}) \leqq y \leqq -x + (1+\sqrt{3})$

以上のことより，



(2)　xy 平面で考えると，



求める体積を V とすると，対称性より

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^1 x^2\,dy - \pi \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \pi \int_0^1 (y^2+2)\,dy - \pi$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}y^3 + 2y\right]_0^1 - \pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

よって，$V = \dfrac{8}{3}\pi$ …（答）

© 河合塾2026年

〔3〕

(1)

p_1は，3回硬貨を投げたとき，左から1,2,3番目の玉がすべて黒である確率である．

よって，

$$p_1=(3回とも裏が出る確率)$$
$$=(1-r)^3 \quad \cdots(答)$$

p_2は，4回硬貨を投げたとき，左から2,3,4番目の玉がすべて黒である確率である．

1回目に表が出ると，左から2番目の玉は白となる．

よって，

$$p_2=(4回とも裏が出る確率)$$
$$=(1-r)^4 \quad \cdots(答)$$

(2)

左から1番目の玉が黒であるから，1回目は裏が出る．

その後，$n+1$回硬貨を投げて，1番目を除いて，左から$n-1$, n, $n+1$番目の玉がすべて黒となる．

よって，求める確率は，$(1-r)p_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ …(答)

(3)

$n+2$回硬貨を投げたとき，左からn, $n+1$, $n+2$番目の玉がすべて黒となるのは，次のいずれかの場合で，互いに排反である．

ア) 1回目が表で，その後n回硬貨を投げて，1, 2番目を除き，左から，$n-2$, $n-1$, n番目の玉がすべて黒となるとき

イ) 1回目が裏で，その後$n+1$回硬貨を投げて，1番目を除き，左から$n-1$, n, $n+1$番目の玉がすべて黒となるとき

よって，$n \geqq 3$のとき，

$$p_n=rp_{n-2}+(1-r)p_{n-1} \quad より，$$
$$p_n=(1-r)p_{n-1}+rp_{n-2} \quad \cdots①　\cdots(答)$$

(4)

①は次の2通りに変形できる．

$$\begin{cases} p_n-p_{n-1}=-r(p_{n-1}-p_{n-2}) & \cdots② \\ p_n+rp_{n-1}=p_{n-1}+rp_{n-2} & \cdots③ \end{cases}$$

②より，

$$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)(-r)^{n-1}$$
$$=(1-r)^3(-r)^n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots④$$

③より，

$$p_{n+1}+rp_n=p_2+rp_1$$
$$=(1-r)^3 \quad (n \geqq 1) \quad \cdots⑤$$

⑤－④より，

$$(1+r)p_n=(1-r)^3\{1-(-r)^n\}$$

よって，

$$p_n=\frac{(1-r)^3\{1-(-r)^n\}}{1+r} \quad \cdots(答)$$

© 河合塾2026年

〔4〕

(1)

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

（証明終）

次に，背理法を用いる.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でないとする，すなわち，有理数であるとする.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r \quad (r:\text{有理数})$$

とおくと，

$$r^2=5+2\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2} \quad \cdots ①$$

①の左辺は無理数であるが，右辺は有理数なので矛盾する.

よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である.　（証明終）

(2)

$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく．$\alpha^2=5+2\sqrt{6}$ より

$$\alpha^2-5=2\sqrt{6}$$

ゆえに，$(\alpha^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2$ より

$\alpha^4-10\alpha^2+1=0$ をみたす

よって，α を解にもち，係数がすべて有理数の4次方程式の1つは，

$$x^4-10x^2+1=0 \quad \cdots ② \quad \cdots（答）$$

また，②より

$$(x^2-5)^2=24$$
$$x^2-5=\pm 2\sqrt{6}$$
$$x^2=5\pm 2\sqrt{6}$$
$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

よって，②の解は，

$$x=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2}),\ \pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ -\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ -\sqrt{3}+\sqrt{2} \quad \cdots（答）$$

(3)

背理法を用いる.

α を解にもち，係数がすべて有理数の2次方程式が存在するとする．その方程式は，l，c を有理数として，

$$x^2+lx+c=0 \quad \cdots ③$$

とおける.

α は，③をみたすから，

$$\alpha^2+l\alpha+c=0 \quad \cdots ④$$

これより，

$$\alpha^4=(-l\alpha-c)^2$$

(2)より，$\alpha^4=10\alpha^2-1$ をみたすから，

$$10\alpha^2-1=l^2\alpha^2+2lc\alpha+c^2$$

④より，$\alpha^2=-l\alpha-c$ を代入して，

$$(l^2-10)(-l\alpha-c)+2lc\alpha+c^2+1=0$$
$$l(l^2-2c-10)\alpha=-l^2c+c^2+10c+1 \quad \cdots ⑤$$

ア）$l(l^2-2c-10)\neq 0$ のとき

⑤は，

$$\alpha=\frac{-l^2c+c^2+10c+1}{l(l^2-2c-10)} \quad \cdots ⑤'$$

となる.

⑤'の左辺は，(1)より無理数であるが，右辺は有理数なので矛盾する.

イ）$l(l^2-2c-10)=0$ のとき

- $l=0$ のとき

⑤は，$0=c^2+10c+1$

すなわち　$c=-5\pm 2\sqrt{6}$　となり

c が有理数であることに矛盾する.

- $l\neq 0$ のとき

$l^2-2c-10=0$ を用いて，⑤は，

$$0=-c(2c+10)+c^2+10c+1$$
$$c^2=1$$
$$c=\pm 1$$

このとき，$l^2=2c+10$

$$=12,\ 8 \quad \text{より}$$

$$l=\pm 2\sqrt{3},\ \pm 2\sqrt{2}$$

l が有理数であることに矛盾する.

以上より，α を解にもち，係数がすべて有理数の2次方程式は存在しない.　（証明終）

© 河合塾2026年

〔5〕

(1) $f(x)=\int_x^{x+1}\log(4t^2+1)\,dt$ に対して，

$$f'(x)=\log\{4(x+1)^2+1\}-\log(4x^2+1)$$
$$=\log\frac{4x^2+8x+5}{4x^2+1}.$$

ここで，

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+8x+5}{4x^2+1}>1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

同様に，

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2},$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

がわかり，$f(x)$ は，

$x=-\frac{1}{2}$ で極小値をとる．…(答)

このときの極小値は，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log(4t^2+1)\,dt$$
$$=\Big[t\log(4t^2+1)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{8t^2}{4t^2+1}dt$$
$$=\log 2-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{8\cdot\frac{1}{4}\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{2\cos^2\theta}$$

$\left(t=\frac{1}{2}\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\text{とおいた.}\right)$

$$=\log 2-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta$$
$$=\log 2-\Big[\tan\theta-\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\log 2-2+\frac{\pi}{2}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 平均値の定理より，

$$\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f'(c)\quad(x-1<c<x)$$

をみたす c が存在する．

$x-1<c<x$ より，$x\to\infty$ のとき，$c\to\infty$ である．

このとき，

$$x\{f(x)-f(x-1)\}=xf'(c)$$
$$=x\log\left(1+\frac{8c+4}{4c^2+1}\right)$$
$$=\frac{\log\left(1+\frac{8c+4}{4c^2+1}\right)}{\frac{8c+4}{4c^2+1}}\cdot\frac{8c+4}{4c^2+1}\cdot x$$
$$=\frac{\log\left(1+\frac{8+\frac{4}{c}}{4c+\frac{1}{c}}\right)}{\frac{8+\frac{4}{c}}{4c+\frac{1}{c}}}\cdot\frac{8\left(\frac{c}{x}\right)+\frac{4}{x}}{4\cdot\left(\frac{c}{x}\right)^2+\frac{1}{x^2}}$$

ここで，$1-\frac{1}{x}<\frac{c}{x}<1$ より，

$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=1$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}x\{f(x)-f(x-1)\}=1\cdot\frac{8}{4}$$
$$=2\quad\cdots(\text{答})$$

© 河合塾2026年