I．

問1　質点mが質点Mに衝突する直前の速度のx成分をv_0とすると，力学的エネルギー保存則より

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{したがって，} v_0 = \sqrt{2gh}$$

運動量保存則より，$mv_0 = mv_1 + MV_1$　　完全非弾性衝突だから，$v_1 = V_1$

2式より，$v_1 = V_1 = \frac{m}{m+M}v_0 = \underline{\frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}}$

問2　質点mと質点Mの運動は単振り子とみなせ，周期Tは$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$である。

したがって，求める時間は，$\frac{1}{2}T = \underline{\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

問3　運動量保存則より，$mv_0 = mv_1 + MV_1$　　弾性衝突だから，$-(v_0 - 0) = v_1 - V_1$

2式より，$v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0 = \underline{-\frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}}$ ，$V_1 = \frac{2m}{m+M}v_0 = \underline{\frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}}$

問4　2回目の衝突直前の質点mと質点Mの速度は，それぞれ$-v_1$，$-V_1$である。2回目の衝突直後の速度をそれぞれv_2，V_2とすると

運動量保存則より

$$m(-v_1) + M(-V_1) = mv_2 + MV_2$$

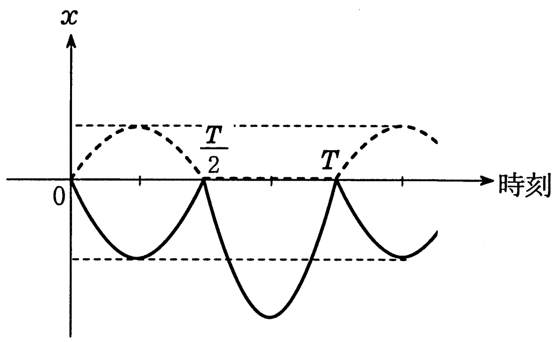
$$-mv_0 = mv_2 + MV_2$$

弾性衝突だから

$$-\{-v_1 - (-V_1)\} = v_2 - V_2$$

$$-v_0 = v_2 - V_2$$

2式より，$v_2 = -v_0$ ，$V_2 = 0$



問5　反発係数がeだから，$v_1 - V_1 = \underline{-ev_0}$

原点で衝突するごとに，質点mと質点Mの相対速度の大きさはe倍になるので，十分な時間が経つと両者は同じ速度に近づく。この速度をuとする。奇数回目の衝突で運動量の和はmv_0，偶数回目の衝突で運動量の和は$-mv_0$でそれぞれ保存されるから，運動量保存則より

$$\pm mv_0 = (M+m)u \qquad \text{よって，速さは，} |u| = \underline{\frac{m}{M+m}v_0}$$

Ⅱ.

問1　C_0とC_1に蓄えられる電気量は等しいので，C_0とC_1を直列接続とみなしてよい。

したがって，C_1の点A側の極板上の電気量は，$Q_1 = \underline{\dfrac{C_0C_1}{C_0+C_1}E_1}$

電池E_1がした仕事は，$W_1 = Q_1E_1 = \underline{\dfrac{C_0C_1}{C_0+C_1}E_1^2}$

問2　C_0，C_1，C_2の点Y側の電気量の和は0であるから，電気量保存則より

$C_0V_0' + C_1(V_0' - E_1) + C_2(V_0' - E_2) = 0$　したがって，$V_0' = \underline{\dfrac{C_1E_1 + C_2E_2}{C_0+C_1+C_2}}$

よって

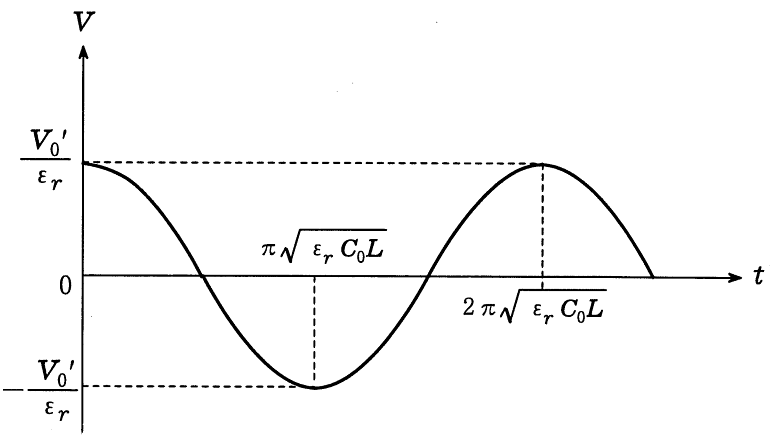
$$Q_1' = C_1(E_1 - V_0') = \underline{\frac{C_1\{(C_0+C_2)E_1 - C_2E_2\}}{C_0+C_1+C_2}} \qquad Q_2' = C_2(E_2 - V_0') = \underline{\frac{C_2\{(C_0+C_1)E_2 - C_1E_1\}}{C_0+C_1+C_2}}$$

問3　C_0に蓄えていた電気量は，C_0V_0'で保存される。また，誘電体を挿入すると，電気容量は $\varepsilon_r C_0$ になる。

外力がした仕事は，静電エネルギー変化に等しいから

$$\frac{(C_0V_0')^2}{2\varepsilon_r C_0} - \frac{(C_0V_0')^2}{2C_0} = \underline{-\frac{1}{2}C_0V_0'^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

問4　電気振動の周期は $2\pi\sqrt{\varepsilon_r C_0 L}$ である。また，$t=0$ のとき，電位Vは電圧値$\dfrac{V_0'}{\varepsilon_r}$ である。



Ⅲ.

問1　初期状態における各容器内の気体の状態方程式より, $p_0SL = nRT_0$ ……①

容器1 内の気体の温度をT_1にしたときの気体の圧力をp_1とすると, 状態方程式より, $p_1SL = nRT_1$ ……②

①,②式より, $p_1 = \underline{\dfrac{nRT_1}{SL}} = \underline{\dfrac{T_1}{T_0}p_0}$

定積変化だから, 気体に加えられた熱量をQ_1とすると, $Q_1 = \underline{\dfrac{3}{2}nR(T_1 - T_0)} = \underline{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{T_1}{T_0} - 1\right)p_0SL}$

問2　定圧変化だから, 体積変化をΔVとすると, 気体がピストンにした仕事W_2は

$$W_2 = p_0\Delta V = \underline{nR(T_2 - T_0)} = \underline{\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right)p_0SL}$$

問3　定圧変化だから, 容器2に加えられた熱量をQ_2とすると, $Q_2 = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_0) = \dfrac{5}{2}p_0SL\left(\dfrac{T_2}{T_0} - 1\right)$

$Q_1 = Q_2$ より, $\dfrac{3}{2}nR(T_1 - T_0) = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_0)$　　よって, $T_2 = \underline{\dfrac{3T_1 + 2T_0}{5}}$

容器2 の長さは, $L + \dfrac{\Delta V}{S} = L + \left(\dfrac{T_2}{T_0} - 1\right)L = \dfrac{T_2}{T_0}L = \dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}L$　よって, $\underline{\dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}}$倍

問4　コックを開いて十分な時間が経った後の気体の温度をT, 容器2 の長さの変化をΔLとすると, 容器全体の状態方程式より, $p_0S(2L + \Delta L) = 2nRT$ ……③

③/①より, $2 + \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{2T}{T_0}$　　したがって, $\Delta L = 2\left(\dfrac{T}{T_0} - 1\right)L$

仕事とエネルギーの関係より, $\dfrac{3}{2}nRT_1 + \dfrac{3}{2}nRT_0 = \dfrac{3}{2}\cdot 2nRT + p_0S\Delta L$

①式より, p_0S を消去し, ΔL を消去して,　$T = \underline{\dfrac{3T_1 + 7T_0}{10}}$

容器2 の長さは, $L + \Delta L = L + 2\left(\dfrac{T}{T_0} - 1\right)L = \left(\dfrac{2T}{T_0} - 1\right)L = \dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}L$　　よって, $\underline{\dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}}$ 倍

【別解】問2において, 熱量 $Q_2 = Q_1$を与えた場合の容器2の長さは, $\dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}L$ である。

容器1と容器2の圧力は共に p_0であるから, コックを開けてもピストンは動かない。したがって, 容器の長さは問3と同じである。よって, $\underline{\dfrac{3T_1 + 2T_0}{5T_0}}$ 倍

内部エネルギーの和は保存されるから

$$\frac{3}{2}nRT_0 + \frac{3}{2}nRT_2 = \frac{3}{2}2nRT \Leftrightarrow T_0 + T_2 = 2T \quad \therefore T = \frac{T_0 + T_2}{2} = \underline{\frac{3T_1 + 7T_0}{10}}$$