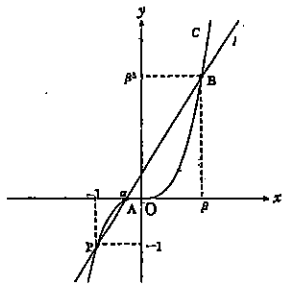
数学　神戸大学[文系]（前期）

1



(1)　$l: y=ax+t$ は点 P$(-1,-1)$ を通るので，

$$-1=a\cdot(-1)+t \quad \text{すなわち} \quad a=t+1$$

が成り立つから，l の方程式は，

$$y=(t+1)x+t. \quad \cdots ①$$

①と $y=x^3$ から y を消去すると，

$$x^3=(t+1)x+t.$$

$$x^3-(t+1)x-t=0.$$

$$(x+1)(x^2-x-t)=0. \quad \cdots ②$$

②の解は，

「$x=-1$ と $x^2-x-t=0\cdots$③の解」

であるから，l が C と相異なる3つの共有点をもつのは，③が -1 を解にもたず，異なる2つの実数解をもつときである．

したがって，

$$\begin{cases}(-1)^2-(-1)-t\neq 0,\\ (\text{③の判別式})=1+4t>0\end{cases}$$

より，t のとりうる値の範囲は，

$$-\frac{1}{4}<t<2,\ 2<t. \quad \cdots ④ \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　α，βは③の解であるから，解と係数の関係により，

$$\alpha+\beta=1, \quad \cdots ⑤$$

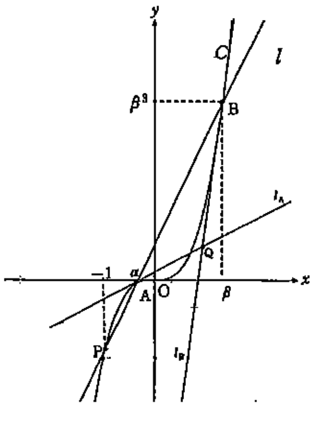
$$\alpha\beta=-t \quad \cdots ⑥ \quad \cdots(\text{答})$$

が成り立ち，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=2t+1. \cdots(\text{答})$$

(3)



$y=x^3$ より，$y'=3x^2$であるから，l_{A} の方程式は，

$$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha).$$

$$y=3\alpha^2x-2\alpha^3. \quad \cdots ⑦$$

同様にして，l_{B} の方程式は，

$$y=3\beta^2x-2\beta^3. \quad \cdots ⑧$$

⑦，⑧から，yを消去すると，

$$3\alpha^2x-2\alpha^3=3\beta^2x-2\beta^3.$$

$$3(\alpha^2-\beta^2)x=2(\alpha^3-\beta^3).$$

$$3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)x=2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$$

$\alpha\neq\beta$ より，$\alpha-\beta\neq 0$ であるから，

$$x=\frac{2(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)}{3(\alpha+\beta)}. \quad \cdots ⑨$$

⑨を⑦に代入して，

$$y=3\alpha^2\cdot\frac{2(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)}{3(\alpha+\beta)}-2\alpha^3$$

$$=\frac{2\{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)-\alpha^3(\alpha+\beta)\}}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha+\beta}. \quad \cdots ⑩$$

⑨と⑩に⑤，⑥を用いると，

$$x=\frac{2}{3}(t+1), \quad \cdots ⑪$$

$$y=2t^2. \quad \cdots ⑫$$

⑪，⑫が点Qのx，y座標である．

⑪より，

$$t=\frac{3}{2}x-1. \quad \cdots ⑬$$

⑬を⑫に代入すると，

$$y=2\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2=\frac{9}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2,$$

⑬を④に代入すると，

$$-\frac{1}{4}<\frac{3}{2}x-1<2,\ 2<\frac{3}{2}x-1.$$

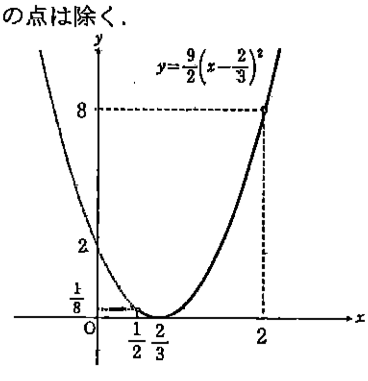
$$\frac{1}{2}<x<2,\ 2<x.$$

以上より，点Qの軌跡は，

「放物線 $y=\dfrac{9}{2}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2$ の

$\dfrac{1}{2}<x<2,\ 2<x$ の部分」…(答)

であり，図示すると次図の実線部分である．ただし，白丸◦の点は除く．



…(答)

2

(1) 出た目の組$(a,\ b,\ c)$の総数は，

$$6^3=216\ \text{（通り）}$$

あり，これらは同様に確からしい．

$f(x)$を$g(x)$で割ると，余り$r(x)$は，

$$r(x)=(2c^2-ac+1)x-a+b+2c. \quad \cdots①$$

$r(x)$が0であるとき，

$$\begin{cases}2c^2-ac+1=0, & \cdots②\\ -a+b+2c=0. & \cdots③\end{cases}$$

②より，　$c(a-2c)=1$.

$a,\ b,\ c$はさいころの目であるから，

$$c=1\ \text{かつ}\ a-2c=1.$$

すなわち，　$(a,\ c)=(3,\ 1)$.

これと③より，$b=1$.

したがって，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 1,\ 1)$であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{216}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 与えられた条件より，

$$\begin{cases}2c^2-ac+1=0, & \cdots②\\ -a+b+2c\neq 0. & \cdots④\end{cases}$$

②より，　$(a,\ c)=(3,\ 1)$.

これと④より，$b\neq 1$.

よって，$(a,\ c)=(3,\ 1)$でbは5通りあるから，求める確率は，

$$\frac{5}{216}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) ①より，

$$r(0)=-a+b+2c.$$

$2c$は偶数であるから，$r(0)$が奇数であるのは$-a+b$が奇数，すなわちaとbの偶奇が異なるときである．

aとbの偶奇が異なるのは，

$$3\cdot3+3\cdot3=18\ \text{（通り）}$$

あり，cは6通りあるから，求める確率は，

$$\frac{18\cdot6}{216}=\frac{1}{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

(4) (3)の過程より，$r(0)$が奇数であるのは，aとbの偶奇が異なるときである．

さらに，①より，

$$\begin{aligned}r(1)&=2c^2-ac-a+b+2c+1\\ &=2(c^2+c)-a(c+1)+b+1 \quad \cdots⑤\end{aligned}$$

であるから，$r(1)$が偶数であるのは次のいずれかの場合である．

(ア) aが偶数，bが奇数のとき

$2(c^2+c)$，$a(c+1)$，$b+1$はいずれも偶数であるから，cの値によらず$r(1)$は偶数である．

したがって，組$(a,\ b,\ c)$は

$$3\cdot3\cdot6=54\ \text{（通り）}.$$

(イ) aが奇数，bが偶数のとき

⑤において，$2(c^2+c)$は偶数，$b+1$は奇数であるから，$r(1)$が偶数であるのは$a(c+1)$が奇数，すなわちcが偶数のときである．

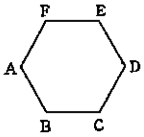
したがって，組$(a,\ b,\ c)$は

$$3\cdot3\cdot3=27\ \text{（通り）}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{54+27}{216}=\frac{3}{8}. \quad \cdots(\text{答})$$

3



(1) A, B, C, D, E, Fの6つから3つ選ぶと三角形が1つでき，選び方が異なればできる三角形は異なるから，6つの頂点から3つの頂点の選び方を考えて，

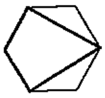
$n(T)={}_6C_3=20$. …(答)

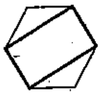
(2) できる四角形全体の個数は，(1)と同様に考えて，

${}_6C_4=15$ (個)

であり，内訳は，次の(ア)，(イ)，(ウ)のとおりである．

(ア)  (連続する4頂点の最初の点を考えて)
の型…4頂点が {A, B, C, D}, {B, C, D, E}, {C, D, E, F}, {D, E, F, A}, {E, F, A, B}, {F, A, B, C}の6個.

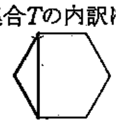
(イ)  (連続する3頂点のとり方を考えて)
の型…4頂点が{A, B, C, E}, {B, C, D, F}, {C, D, E, A}, {D, E, F, B}, {E, F, A, C}, {F, A, B, D}の6個.

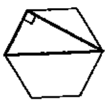
(ウ)  (向かい合う辺のとり方を考えて)
の型…4頂点が{A, B, D, E}, {B, C, E, F}, {C, D, F, A}の3個.

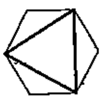
集合Q_1に属するのは(ア)の四角形であり，集合Q_2に属するのは(イ)と(ウ)の四角形であるから，

$n(Q_1)=6$, $n(Q_2)=9$. …(答)

(3) 集合Tの内訳は次のとおりである．

(エ)  (連続する3頂点の最初の点を考えて)
二等辺三角形…3頂点が{A, B, C}, {B, C, D}, {C, D, E}, {D, E, F}, {E, F, A}, {F, A, B}の6個.

(オ)  (直角の頂点のとり方を考えて)
直角三角形…3頂点が{A, B, E}, {A, C, F}, {B, C, F}, {A, B, D}, {C, D, A}, {B, C, E}, {D, E, B}, {C, D, F}, {E, F, C}, {D, E, A}, {F, A, D}, {E, F, B}の12個.

(カ)  (1つおきの頂点のとり方を考えて)
正三角形…3頂点が{A, C, E}, {B, D, F}の2個.

$S_1(X)=\{Y \mid Y\in Q_1$ かつ YはXを含む$\}$,
$S_2(X)=\{Y \mid Y\in Q_2$ かつ YはXを含む$\}$

(i) Xが(エ)二等辺三角形のとき，例えば，三角形ABCに対して，

$S_1(X)=\{$四角形ABCD, 四角形FABC$\}$,
$S_2(X)=\{$四角形ABCE$\}$

であり，他の場合も同様にして，

$n(S_1(X))=2$, $n(S_2(X))=1$.

(ii) Xが(オ)直角三角形のとき，例えば，三角形ABEに対して，

$S_1(X)=\{$四角形EFAB$\}$,
$S_2(X)=\{$四角形ABCE, 四角形ABDE$\}$

であり，他の場合も同様にして，

$n(S_1(X))=1$, $n(S_2(X))=2$.

(iii) Xが(カ)正三角形のとき，例えば，三角形ACEに対して，

$S_1(X)=\varnothing$,
$S_2(X)=\{$四角形ABCE, 四角形CDEA, 四角形EFAC$\}$

であり，他の場合も同様にして，

$n(S_1(X))=0$, $n(S_2(X))=3$.

以上より，各三角形$X\in T$に対して$n(S_1(X))$, $n(S_2(X))$は次の表のようになる．

X	正三角形でない二等辺三角形	直角三角形	正三角形
$n(S_1(X))$	2	1	0
$n(S_2(X))$	1	2	3

…(答)