1

(1) 出た目の組 (a, b, c) の総数は，

$$6^3=216 \ (\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．

$f(x)$ を $g(x)$ で割ると，余り $r(x)$ は，

$$r(x)=(2c^2-ac+1)x-a+b+2c. \quad \cdots①$$

$r(x)$ が 0 であるとき，

$$\begin{cases} 2c^2-ac+1=0, & \cdots② \\ -a+b+2c=0. & \cdots③ \end{cases}$$

②より，　$c(a-2c)=1$.

a, b, c はさいころの目であるから，

$$c=1 \text{ かつ } a-2c=1.$$

すなわち，　$(a, c)=(3, 1)$.

これと③より，$b=1$.

したがって，$(a, b, c)=(3, 1, 1)$ であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{216}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 与えられた条件より，

$$\begin{cases} 2c^2-ac+1=0, & \cdots② \\ -a+b+2c\neq 0. & \cdots④ \end{cases}$$

②より，　$(a, c)=(3, 1)$.

これと④より，$b\neq 1$.

よって，$(a, c)=(3, 1)$ で b は 5 通りあるから，求める確率は，

$$\frac{5}{216}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) 方程式 $g(x)=0$ すなわち $x^2+cx+1=0$ を解くと，

$$x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}.$$

これより $g(x)=0$ が有理数の解をもつのは $\sqrt{c^2-4}$ が有理数になるときであるから，次の表より，

$$c=2.$$

c	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{c^2-4}$	$\sqrt{3}i$	0	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{32}$

よって，求める確率は，

$$\frac{6\cdot 6\cdot 1}{216}=\frac{1}{6}. \quad \cdots(\text{答})$$

(4) $r(x)$ の次数が 1 であるのは，①より，

$$2c^2-ac+1\neq 0$$

のときであり，(1)の過程より，

$$(a, c)\neq(3, 1).$$

このもとで，$g(x)$ が $r(x)$ で割り切れるとき，商を $h(x)$ とすると，

$$g(x)=r(x)h(x)$$

と表される．

ここで，$g(x)$ と $r(x)$ は係数が整数の多項式であるから $h(x)$ は係数が有理数の 1 次式であり，方程式 $g(x)=0$ を考えると，$g(x)$ は係数が有理数の 2 つの 1 次式に因数分解されるから，$g(x)=0$ は有理数の解をもつ．

したがって，(3)の結果より $c=2$ であり，

$$g(x)=x^2+2x+1$$
$$=(x+1)^2.$$

①より，

$$r(x)=(9-2a)x-a+b+4.$$

これより，

$$r(x)=k(x+1) \ (k \text{ は有理数の定数})$$

と表されるから，

$$9-2a=-a+b+4.$$
$$a+b=5.$$
$$(a, b)=(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1).$$

よって，求める確率は，

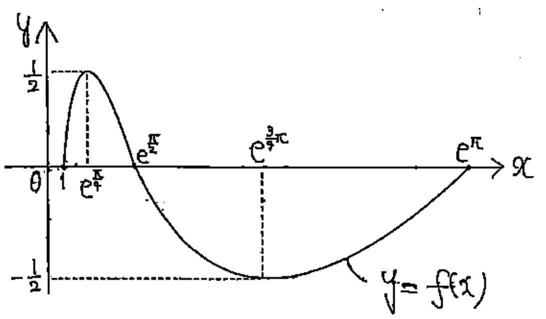
$$\frac{4}{216}=\frac{1}{54}. \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$

(1). $f(x)=\sin(\log x)\cos(\log x)$
$\quad = \frac{1}{2}\sin(2\log x)$
より，
$f'(x)=\frac{1}{x}\cos(2\log x)$
$1\leqq x\leqq e^{\pi}$ より，
$0\leqq \log x\leqq \pi$
$0\leqq 2\log x\leqq 2\pi$ ……①
であるから，$f'(x)=0$ とすると，
$\cos(2\log x)=0$
$2\log x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$
$\log x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$
$x=e^{\frac{\pi}{4}},\ e^{\frac{3}{4}\pi}$
より，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{\pi}{4}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{4}\pi}$	$\cdots$	e^{π}
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

また，$f(x)=0$ とすると，
$\sin(2\log x)=0$
①より，
$2\log x=0,\ \pi,\ 2\pi$
$\log x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$
$x=1,\ e^{\frac{\pi}{2}},\ e^{\pi}$
以上より，$y=f(x)$ のグラフの概形は次の通り．



……(答)

(2) 求める面積を S とおくと，

$S=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{2}\sin(2\log x)dx$

$\log x=t$ とおくと，$x=e^t$ であり，

$dx=e^t dt$，

x	$1\to e^{\frac{\pi}{2}}$
t	$0\to \frac{\pi}{2}$

であるから，

$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin 2t\,dt$
$=\frac{1}{2}\left(\left[e^t\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2e^t\cos 2t\,dt\right)$
$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\cos 2t\,dt$
$=-\left(\left[e^t\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2e^t\sin 2t\,dt\right)$
$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-4S$

よって，
$5S=e^{\frac{\pi}{2}}+1$
$S=\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$ ……(答)

3

(1)　$z=a+bi$ (a, b は整数) とおくと,

$$\begin{aligned}|z^2|&=|z|^2\\&=a^2+b^2\end{aligned}$$

であるから,

$$m=|z^2|=a^2+b^2.$$

よって, $30<m<40$ をみたす m は,

$$32=4^2+4^2,$$
$$34=3^2+5^2,$$
$$36=0^2+6^2,$$
$$37=1^2+6^2$$

の 4 数に限られる.

したがって, 求める整数 m は,

32,　34,　36,　37.　　…(答)

(2)　性質 P をみたす 2 つの整数 m を m_1, m_2 とおき, a_1, a_2, b_1, b_2 を整数として,

$$m_1=a_1^2+b_1^2,\qquad m_2=a_2^2+b_2^2$$

とおく.

$$\begin{aligned}m_1m_2&=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\\&=a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+b_1^2b_2^2\\&=(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2.\end{aligned}$$

よって, 性質 P をみたす整数の積 m_1m_2 は, 性質 P をみたす.

(証明終り)

(3)　$a=2n$ (n は整数) のとき,

$$a^2=4n^2$$

$a=2n+1$ (n は整数) のとき,

$$a^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$$

より, a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である.

b^2 も同様であるから, 4 を法として,

$$m\equiv 0+0\equiv 0,$$
$$m\equiv 0+1\equiv 1,$$
$$m\equiv 1+1\equiv 2$$

のいずれかとなる.

したがって, 4 で割った余りが 3 であるような整数は, 性質 P をみたさない.

(証明終り)

4

(1) $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$ より，

$$g(x)=\sin x\int_a^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_a^x f(t)\sin t\,dt.$$

よって，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\cos x\int_a^x f(t)\cos t\,dt+f(x)\sin x\cos x\\&\quad+\sin x\int_a^x f(t)\sin t\,dt-f(x)\sin x\cos x\\&=\cos x\int_a^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\int_a^x f(t)\sin t\,dt\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}g'(a)&=\cos a\int_a^a f(t)\cos t\,dt+\sin a\int_a^a f(t)\sin t\,dt\\&=0.\quad\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $g'(x)$ を微分して，

$$\begin{aligned}g''(x)&=-\sin x\int_a^x f(t)\cos t\,dt+f(x)\cos^2 x\\&\quad+\cos x\int_a^x f(t)\sin t\,dt+f(x)\sin^2 x\\&=f(x)-g(x).\quad\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

(i) $g(x)=\sin x-\sin^2 x$ ならば，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\cos x-2\sin x\cos x\\&=\cos x-\sin 2x,\\g''(x)&=-\sin x-2\cos 2x\end{aligned}$$

であり，(2) より，$f(x)=g(x)+g''(x)$ であるから，

$$\begin{aligned}f(x)&=-\sin^2 x-2\cos 2x\\&=-\sin^2 x-2(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=\sin^2 x-2\cos^2 x.\end{aligned}$$

また，(1) より，$g'(a)=0$ であり，

$$g(x)=\int_a^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

より，

$$g(a)=\int_a^a f(t)\sin(x-t)\,dt=0.$$

よって，$a\ (0\leqq a\leqq\pi)$ は，

$g(a)=\sin a(1-\sin a)=0$　すなわち　$\sin a=0,\ 1$

を満たすので，

$$a=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

であり，このうち $g'(a)=0$ も満たすのは，

$$\begin{aligned}g'(0)&=\cos 0-\sin 0=1,\\g'\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi=0,\\g'(\pi)&=\cos\pi-\sin 2\pi=-1\end{aligned}$$

より，

$$a=\frac{\pi}{2}.$$

(ii) $f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$ かつ $a=\dfrac{\pi}{2}$ ならば，

$$\begin{aligned}g(x)&=\sin x\int_a^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_a^x f(t)\sin t\,dt\\&=\sin x\int_a^x(3\sin^2 t-2)\cos t\,dt\\&\qquad-\cos x\int_a^x(1-3\cos^2 t)\sin t\,dt\\&=\sin x\Big[\sin^3 t-2\sin t\Big]_a^x+\cos x\Big[\cos t-\cos^3 t\Big]_a^x\\&=\sin x(\sin^3 x-2\sin x+1)+\cos x(\cos x-\cos^3 x)\\&=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x+\cos^2 x(1-\cos^2 x)\\&=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x+(1-\sin^2 x)\sin^2 x\\&=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x+\sin^2 x-\sin^4 x\\&=\sin x-\sin^2 x.\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，示せた．

（証明終り）

5

(1)　$(1+r^2)\alpha^2-2\alpha+1=0$ より，

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{-r^2}}{1+r^2}$$

すなわち，

$$\alpha=\frac{1}{1+r^2}\pm\frac{r}{1+r^2}i\quad(r>0\text{ より})$$

$\alpha=X+Yi$（X，Yは実数）とおき，実部と虚部を比較すると，

$$\begin{cases}X=\dfrac{1}{1+r^2}\\ Y=\pm\dfrac{r}{1+r^2}\end{cases}$$

これより，

$$X^2+Y^2=\left(\frac{1}{1+r^2}\right)^2+\left(\pm\frac{r}{1+r^2}\right)^2$$
$$=\frac{1+r^2}{(1+r^2)^2}$$
$$=\frac{1}{1+r^2}$$

が成り立つから，

$$X^2+Y^2=X$$

すなわち，

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\frac{1}{4}$$

また，$r>0$ より，

$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$

よって，中心$\frac{1}{2}$，半径$\frac{1}{2}$の円をCとすると，Aの軌跡は，

Cから2点0，1を除いた部分．

したがって，すべての正の実数rに対して，AはC上にあるから，条件をみたす円Cが存在する．

（証明終り）

以上より，

Cの中心を表す複素数は$\frac{1}{2}$，　…（答）

Cの半径は$\frac{1}{2}$　…（答）

(2)　$r=te^{-t}$ より，

$$\frac{dr}{dt}=1\cdot e^{-t}+t\cdot(-e^{-t})$$
$$=(1-t)e^{-t}$$

よって，$t>0$ における r の増減は次のようになる．

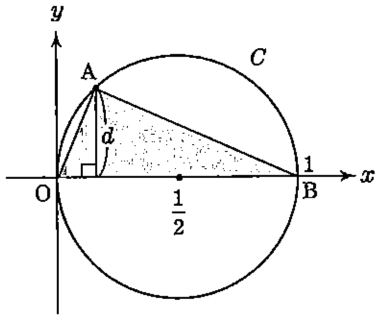
t	(0)	…	1	…
$\frac{dr}{dt}$		+	0	−
r	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘

これと $r>0$ より，r のとりうる値の範囲は，

$$0<r\leqq\frac{1}{e}$$

次に，Aと実軸の距離をdとすると，

$$d=|(\alpha\text{の虚部})|=\frac{r}{1+r^2}\quad(r>0\text{ より})$$



三角形OABの面積を$S(r)$とすると，

$$S(r)=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot d=\frac{r}{2(1+r^2)}$$

これより，

$$S'(r)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot(1+r^2)-r\cdot 2r}{(1+r^2)^2}$$
$$=\frac{(1+r)(1-r)}{2(1+r^2)^2}$$

$0<r\leqq\frac{1}{e}$ において $S'(r)>0$ より，

$0<r\leqq\frac{1}{e}$ において $S(r)$ は単調増加．

以上より，三角形OABの面積$S(r)$の最大値は，

$$S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e}{2(e^2+1)}\quad\cdots\text{（答）}$$

また，$S(r)$が最大となるのは，

$$r=\frac{1}{e}$$

のときであるから，増減表より求めるtの値は，

$t=1$　…（答）