

[I]

(1) 求める確率 $P\left(\frac{\pi}{4} \leq Y \leq \frac{3\pi}{8}\right)$ は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} g(y) dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \sin 2y dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2y\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \\ &= -\frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}. \end{aligned} \quad \dots (\text{あ})(\text{答})$$

部分積分より

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} yg(y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin 2y dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}y \cos 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2y dy \\ &= \left(-\frac{\pi}{4} \cdot \cos \pi - 0\right) + \left[\frac{1}{4} \sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + (0 - 0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad \dots (\text{い})(\text{答})$$

$E(Y) = m$ とおくと

$$\begin{aligned} V(Y) &= E((Y - m)^2) \\ &= E(Y^2 - 2mY + m^2) \\ &= E(Y^2) - 2mE(Y) + m^2 \\ &= E(Y^2) - 2m^2 + m^2 \\ &= E(Y^2) - m^2 \end{aligned}$$

となる. 部分積分より

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 g(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin 2y dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}y^2 \cos 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos 2y dy \\ &= \left(-\frac{\pi^2}{8} \cos \pi - 0\right) + \left[\frac{1}{2}y \sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2y dy \\ &= \frac{\pi^2}{8} + (0 - 0) - \left[-\frac{1}{4} \cos 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[I] (つづき)

であるから、

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^2}{16} \\ &= \boxed{\frac{\pi^2 - 8}{16}}. \end{aligned} \quad \dots (う)(答)$$

$$(2) \quad a^3 - 4a \leq 3(a+2) \quad \text{かつ} \quad 3(a+1) \leq a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1$$

であることが必要十分条件である.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a^3 - 4a \qquad a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1 \\ \hline 3(a+1) \qquad 3(a+2) \end{array} & & \begin{array}{c} a^3 - 4a \qquad a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1 \\ \hline 3(a+1) \qquad 3(a+2) \end{array} \end{array}$$

整理すると、

$$\begin{aligned} a^3 - 7a - 6 &\leq 0 \quad \text{かつ} \quad a^3 + 2a^2 - 11a \geq 0 \\ \iff (a+1)(a+2)(a-3) &\leq 0 \quad \text{かつ} \quad a(a^2 + 2a - 11) \geq 0 \\ \iff (a \leq -2 \text{ または } -1 \leq a \leq 3) &\quad \text{かつ} \quad (-1 - 2\sqrt{3} \leq a \leq 0 \text{ または } -1 + 2\sqrt{3} \leq a) \end{aligned}$$

以上より

$$\boxed{-1 - 2\sqrt{3}} \leq a \leq \boxed{-2}, \text{ または } \boxed{-1} \leq a \leq \boxed{0}, \text{ または } \boxed{-1 + 2\sqrt{3}} \leq a \leq \boxed{3} \quad \dots (え) \sim (け)(答)$$

(3) 四角形 OPQR が平行四辺形より $\vec{OP} = \vec{RQ}$ が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c-b \\ d - \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

よって、

$$c = \boxed{b+1}, \quad d = \boxed{\frac{1}{b} - 1} \quad \dots (こ)(き)(答)$$

$$\begin{aligned} S(b) &= \sqrt{|\vec{OP}|^2 |\vec{OR}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OR})^2} \\ &= \sqrt{2 \left(1 + b^2 + \frac{1}{b^2} \right) - \left(b - \frac{1}{b} \right)^2} \\ &= \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} + 4} \end{aligned} \quad \dots (し)(答)$$

相加平均と相乗平均の関係式より

$$S(b) \geq \sqrt{2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} + 4} = \sqrt{6}.$$

等号成立は $b^2 = \frac{1}{b^2}$ のとき、つまり、 $b = \pm 1$ のとき。よって、 $S(b)$ の最小値は

$$\boxed{\sqrt{6}}. \quad \dots (す)(答)$$

[II]

(1) 袋に入っている玉が赤 4 個, 白 2 個の事象, 赤 2 個, 白 2 個の事象, 赤 0 個, 白 2 個の事象をそれぞれ A, B, C とおく. 最初の状態を $n = 0$ のときと考えると, $p_0 = 1, q_0 = 1$ とおける.

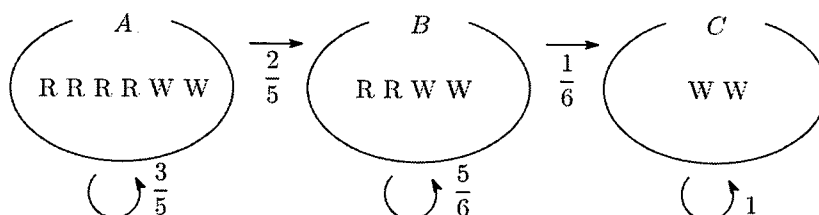
A のとき, 計 6 個の玉から 2 個を選ぶ方法は ${}_6C_2 = 15$ 通り, 赤 4 個から 2 個を選ぶ方法は ${}_4C_2 = 6$ 通りであるから, T を 1 回施して A が B になる確率は $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. A のままになる確率は $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. よって,

$$p_{n+1} = \left[\frac{3}{5} \right] p_n \quad \dots (\text{あ})(\text{答})$$

B のとき, 計 4 個の玉から 2 個を選ぶ方法は ${}_4C_2 = 6$ 通り, 赤 2 個から 2 個を選ぶ方法は 1 通りであるから, T を 1 回施して B が C になる確率は $\frac{1}{6}$.

B のままになる確率は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. よって,

$$q_{n+1} = \left[\frac{2}{5} \right] p_n + \left[\frac{5}{6} \right] q_n \quad \dots (\text{い})(\text{う})(\text{答})$$



$p_0 = 1$ より,

$$p_n = \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n \right] \quad \dots (\text{え})(\text{答})$$

$$q_{n+1} = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{5}{6} q_n. \quad \dots \textcircled{1}$$

$\alpha \left(\frac{3}{5} \right)^n$ を $\textcircled{1}$ に代入して,

$$\alpha \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{5}{6} \alpha \left(\frac{3}{5} \right)^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ より $\alpha = -\frac{12}{7}$ を得る. $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より,

$$q_{n+1} + \frac{12}{7} \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} = \frac{5}{6} \left\{ q_n + \frac{12}{7} \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$$

等比数列の一般項の公式より,

$$q_n + \frac{12}{7} \left(\frac{3}{5} \right)^n = \left\{ q_0 + \frac{12}{7} \left(\frac{3}{5} \right)^0 \right\} \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

$q_0 = 0$ であるから,

$$q_n = \left[\frac{12}{7} \right] \left\{ \left[\left(\frac{5}{6} \right)^n \right] - \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n \right] \right\} \quad \dots (\text{お}) \sim (\text{き})(\text{答})$$

n 回後 ($n \geq 1$) に初めて赤玉 0 個になる確率は

[II] (つづき)

$$\frac{1}{6}q_{n-1} = \boxed{\frac{2}{7} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\}} \quad \dots (\text{く})(\text{答})$$

この確率を r_n とおく.

(2)

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 6p_n + \frac{7}{2}q_n + 0(1 - p_n - q_n) \\ &= 6 \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{7} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^n - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} + 0 \\ &= \boxed{6 \left(\frac{5}{6} \right)^n} \quad \dots (\text{け})(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= 36p_n + \frac{49}{4}q_n + 0(1 - p_n - q_n) \\ &= 36 \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{49}{4} \cdot \frac{12}{7} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^n - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} + 0 \\ &= 21 \left(\frac{5}{6} \right)^n + 15 \left(\frac{3}{5} \right)^n \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n^2) - (E(X_n))^2 \\ &= 21 \left(\frac{5}{6} \right)^n + 15 \left(\frac{3}{5} \right)^n - \left\{ 6 \left(\frac{5}{6} \right)^n \right\}^2 \\ &= 3 \left\{ 7 \left(\frac{5}{6} \right)^n + 5 \left(\frac{3}{5} \right)^n - 12 \left(\frac{25}{36} \right)^n \right\} \\ &= 3 \left\{ \boxed{7} \left(\frac{5}{6} \right)^n + \boxed{(-12)} \left(\frac{25}{36} \right)^n + \boxed{5} \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} \quad \dots (\text{こ}) \sim (\text{そ})(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 得点を Y_n とおく.

$$\begin{aligned} E(Y_N) &= \sum_{n=1}^N 2^{N-n} r_n + 0(p_n + q_n) \\ &= \sum_{n=1}^N 2^{N-n} \frac{2}{7} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{2}{7} 2^{N-1} \sum_{n=1}^N 2^{-(n-1)} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{2^N}{7} \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{2^N}{7} \left[\frac{12}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{12} \right)^N \right\} - \frac{10}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{10} \right)^N \right\} \right] \\ &= \frac{2}{49} 2^N - \frac{12}{49} \left(\frac{5}{6} \right)^N + \frac{10}{49} \left(\frac{3}{5} \right)^N \\ &= \boxed{\frac{2}{49}} \left\{ \boxed{2}^N + \boxed{(-6)} \left(\frac{5}{6} \right)^N + \boxed{5} \left(\frac{3}{5} \right)^N \right\} \quad \dots (\text{た}) \sim (\text{な})(\text{答}) \end{aligned}$$

[Ⅲ]

- (1) $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$ のとき、ド・モアブルの定理より

$$z^r = \cos \left(\frac{2}{7}\pi r \right) + i \sin \left(\frac{2}{7}\pi r \right)$$

となるので、 $z^r = 1$ となるのは $\frac{r}{7}$ が整数になるときである。このような自然数 r の最小値 k は、

$$k = \boxed{7} \quad \dots(\text{あ})(\text{答})$$

である。次に、 $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$ と $a = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z}$ より

$$a = \left(\cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi \right) + \left(\cos \frac{2}{7}\pi - i \sin \frac{2}{7}\pi \right) = 2 \cos \left(\boxed{\frac{2}{7}}\pi \right) \quad \dots(\text{い})(\text{答})$$

と表せ、

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2z \cdot \frac{1}{z} = \boxed{a^2 - 2}, \quad \dots(\text{う})(\text{答})$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - 3z \cdot \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \boxed{a^3 - 3a} \quad \dots(\text{え})(\text{答})$$

となるので、 $\frac{z^k - 1}{z - 1} = 0$ つまり $\frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0$ より、

$$\begin{aligned} z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= 0 \\ z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} &= 0 \\ \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 &= 0 \\ (a^3 - 3a) + (a^2 - 2) + a + 1 &= 0 \\ a^3 + a^2 - 2a - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。つまりこれは、 a が 3 次方程式

$$x^3 + \boxed{1}x^2 + \boxed{(-2)}x + \boxed{(-1)} = 0 \quad \dots(\text{お}) \sim (\text{き})(\text{答})$$

の解であることを表している。同様に、 $z^2 = \cos \frac{4}{7}\pi + i \sin \frac{4}{7}\pi$ と $z^3 = \cos \frac{6}{7}\pi + i \sin \frac{6}{7}\pi$ も 1 の 7 乗根であるから、 $b = 2 \cos \frac{4}{7}\pi$ と $c = 2 \cos \frac{6}{7}\pi$ も $b^3 + b^2 - 2b - 1 = 0$ と $c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0$ を満たす。つまり、 b と c も 3 次方程式

$$f(x) = 0 \quad (\text{ただし、} f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1)$$

の解であり、 $0 < \frac{2}{7}\pi < \frac{\pi}{2} < \frac{4}{7}\pi < \frac{6}{7}\pi < \pi$ より

$$\begin{aligned} 2 \cos \pi < 2 \cos \frac{6}{7}\pi < 2 \cos \frac{4}{7}\pi < 2 \cos \frac{\pi}{2} < 2 \cos \frac{2}{7}\pi < 2 \cos 0 \\ -2 < c < b < 0 < a < 2 \end{aligned} \quad \dots\textcircled{1}$$

[Ⅲ] (つづき)

となり, a, b, c は相異なるので, $f(x) = 0$ の 3 解は $x = a, b, c$ である. よって,

$$b = 2 \cos \left(\left\lfloor \frac{4}{7} \right\rfloor \pi \right), \quad c = 2 \cos \left(\left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor \pi \right) \quad \dots (\text{く}) (\text{け}) (\text{答})$$

である.

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} < \frac{2}{7}\pi < \frac{\pi}{3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi}{3} &< 2 \cos \frac{2}{7}\pi < 2 \cos \frac{\pi}{4} \\ 1 &< a < \sqrt{2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

すなわち $1 < a^2 < 2$ となるので, $\sqrt{m} < a < \sqrt{m+1}$ (つまり, $m < a^2 < m+1$) を満たす自然数 m は

$$m = \boxed{1} \quad \dots (\text{こ}) (\text{答})$$

である.

$$(3) \quad \textcircled{2} \text{ より } \sqrt{\frac{10}{10}} < a < \sqrt{\frac{20}{10}} \text{ となるので, } \sqrt{\frac{n}{10}} < a < \sqrt{\frac{n+1}{10}} \text{ を満たす自然数 } n \text{ は } 10 \leq n \leq 19 \text{ の範囲にある. (1) の } f(x) \text{ を用いると, } \textcircled{1} \text{ より } f(x) = 0 \text{ の } x > 0 \text{ を満たす解は } x = a \text{ のみであり,}$$

$$f(\sqrt{1.5}) = (\sqrt{1.5})^3 + (\sqrt{1.5})^2 - 2\sqrt{1.5} - 1 = 0.5 - 0.5\sqrt{1.5} = 0.5(\sqrt{1} - \sqrt{1.5}) < 0$$

$$f(\sqrt{1.6}) = (\sqrt{1.6})^3 + (\sqrt{1.6})^2 - 2\sqrt{1.6} - 1 = 0.6 - 0.4\sqrt{1.6} = 0.2(\sqrt{9} - \sqrt{6.4}) > 0$$

であるから, $\sqrt{1.5} < a < \sqrt{1.6}$ つまり $15 < 10a^2 < 16$ が成り立つ.

よって, $\sqrt{\frac{n}{10}} < a < \sqrt{\frac{n+1}{10}}$ (つまり, $n < 10a^2 < n+1$) を満たす自然数 n は

$$n = \boxed{15} \quad \dots (\text{さ}) (\text{答})$$

である.

$$(4) \quad (1) \text{ より } a = 2 \cos \frac{2}{7}\pi \text{ と表せ, } \textcircled{1} \text{ より } |b| = -b, |c| = -c \text{ であるから,}$$

$$|b| = -b = -2 \cos \frac{4}{7}\pi = 2 \cos \left(\pi - \frac{4}{7}\pi \right) = 2 \cos \frac{3}{7}\pi,$$

$$|c| = -c = -2 \cos \frac{6}{7}\pi = 2 \cos \left(\pi - \frac{6}{7}\pi \right) = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

と表せる. このことと $\frac{\pi}{7} < \frac{2}{7}\pi < \frac{3}{7}\pi$ より

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{3}{7}\pi &< 2 \cos \frac{2}{7}\pi < 2 \cos \frac{\pi}{7} \\ \boxed{|b|} &< \boxed{a} < \boxed{|c|} \end{aligned} \quad \dots (\text{し}) \sim (\text{せ}) (\text{答})$$

となる.

[Ⅲ] (つづき 2)

(5) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解と係数の関係より,

$$a + b + c = -1$$

すなわち $a + c = -b - 1$ が成り立ち, ①より $|b| = -b$, $|c| = -c$ なので,

$$\begin{aligned} |b| + a - |c| &= -b + a + c \\ &= -b + (-b - 1) \\ &= -2b - 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる. 一方, (1) の $f(x)$ を用いると, ①より, $f(x) = 0$ の $x < 0$ を満たす 2 つの解のうち大きいほうは $x = b$ であり,

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0, \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{8} > 0 \end{aligned}$$

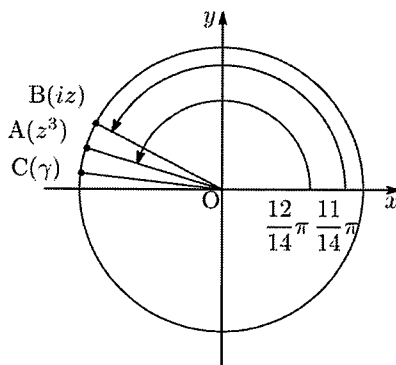
であるから, $-\frac{1}{2} < b$ つまり $-2b - 1 < 0$ が成り立つ. このことと③より, $|b| + a < |c|$ つまり, (最大の数) $>$ (残り 2 数の和) が成り立つので,

$a, |b|, |c|$ を 3 辺の長さとする三角形は存在しない. ...(答)

(6) $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$ より

$$\begin{aligned} z^3 &= \cos \frac{6}{7}\pi + i \sin \frac{6}{7}\pi = \cos \frac{12}{14}\pi + i \sin \frac{12}{14}\pi, \\ iz &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \left(\cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi\right) = \cos \frac{11}{14}\pi + i \sin \frac{11}{14}\pi \end{aligned}$$

であるから,



直線 OA に関して, B と対称な点を $C(\gamma)$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} &= OB \cos \frac{\pi}{14} \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \left(2 \cos \frac{\pi}{14}\right) \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OC} &= \left(2 \cos \frac{\pi}{14}\right) \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

[Ⅲ] (つづき 3)

と表せる. つまり,

$$\gamma = \left(2 \cos \frac{\pi}{14}\right) z^3 - iz$$

であり,

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi}{14} &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14} \right) \\ &= 2 \sin \frac{4}{7} \pi \\ &= 4 \sin \frac{2}{7} \pi \cos \frac{2}{7} \pi && (2 \text{ 倍角の公式より}) \\ &= 2 \cos \frac{2}{7} \pi \sqrt{4 - 4 \cos^2 \frac{2}{7} \pi} \\ &= a \sqrt{4 - a^2} \end{aligned}$$

と表せるから,

$$\gamma = \boxed{a\sqrt{4-a^2}} z^3 + \boxed{(-1)} iz \quad \dots (\text{そ})(\text{た})(\text{答})$$

となる.

$$(7) \quad z = \cos \frac{2}{7} \pi + i \sin \frac{2}{7} \pi \text{ より } z \bar{z} = |z|^2 = 1 \text{ であり,}$$

$$w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

より $w \bar{w} = |w|^2 = 1$ なので,

$$\begin{aligned} |z^d + w^d|^2 &= (z^d + w^d)(\overline{z^d + w^d}) \\ &= (z^d + w^d)\{(\bar{z})^d + (\bar{w})^d\} \\ &= (z \bar{z})^d + (\bar{z} w)^d + (z \bar{w})^d + (w \bar{w})^d \\ &= 1^d + (\bar{z} w)^d + \{(\overline{\bar{z} w})\}^d + 1^d \\ &= 2 + (\bar{z} w)^d + \{(\overline{\bar{z} w})\}^d && \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

と表せ,

$$\bar{z} w = \cos \left(-\frac{2}{7} \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2}{7} \pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{21} + i \sin \frac{\pi}{21}$$

であるから, ド・モアブルの定理より, ④は

$$\begin{aligned} |z^d + w^d|^2 &= 2 + \left(\cos \frac{\pi}{21} + i \sin \frac{\pi}{21} \right)^d + \left(\cos \frac{\pi}{21} - i \sin \frac{\pi}{21} \right)^d \\ &= 2 + \left(\cos \frac{d\pi}{21} + i \sin \frac{d\pi}{21} \right) + \left(\cos \frac{d\pi}{21} - i \sin \frac{d\pi}{21} \right) \\ &= 2 + 2 \cos \frac{d\pi}{21} \end{aligned}$$

となる. よって, 自然数 d が $1 \leq d \leq 2026$ の範囲を動くとき, $|z^d + w^d| = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{d\pi}{21}}$ の最大値は

$$|z^d + w^d| = \sqrt{2 + 2 \cdot 1} = \boxed{2} \quad \dots (\text{ち})(\text{答})$$

[Ⅲ] (つづき 4)

であり, このような d は

$$\frac{d\pi}{21} = 2n\pi \quad \text{すなわち, } d = 42n \quad (n \text{ は整数})$$

と表せるので, $\frac{2026}{42} = 48.2\cdots$ より,

$$n = 1, 2, 3, \dots, 48 \text{ の } \boxed{48} \text{ 個} \quad \dots(\text{つ})(\text{答})$$

ある.

[(7) の別解]

$$z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi \text{ より } |z| = 1 \text{ であり,}$$

$$w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

より $|w| = 1$ である. このことと, 三角不等式より

$$\begin{aligned} |z^d + w^d| &\leq |z^d| + |w^d| \\ &= |z|^d + |w|^d \\ &= 1^d + 1^d \end{aligned}$$

つまり $|z^d + w^d| \leq 2$ が成り立つ. この不等式の等号が成り立つのは, $\arg(z^d) = \arg(w^d)$ となるときであるから,

$$\frac{2\pi}{7}d + 2n\pi = \frac{\pi}{3}d \quad \text{すなわち, } d = 42n \quad (n \text{ は整数})$$

のとき, $|z^d + w^d|$ は最大値

$$|z^d + w^d| = \boxed{2} \quad \dots(\text{ち})(\text{答})$$

をとり, このときの $1 \leq d \leq 2026$ を満たす自然数 d は, $\frac{2026}{42} = 48.2\cdots$ より,

$$n = 1, 2, 3, \dots, 48 \text{ の } \boxed{48} \text{ 個} \quad \dots(\text{つ})(\text{答})$$

ある.

((7) の別解] 終り)

[IV]

(1)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2a}{x^3} = \frac{2a(x-1)^2 - x^3}{x^3(x-1)^2}$$

$y = f(x)$ のグラフが $x = t (> 1)$ で直線 $y = 0$ と接する条件は

$$f(t) = 0 \text{ かつ } f'(t) = 0$$

すなわち

$$\begin{cases} t^2 - a(t-1) = 0 \\ 2a(t-1)^2 - t^3 = 0 \end{cases}$$

となる. これを解いて $a = \boxed{4}$, 接点の x 座標は $(t) = \boxed{2}$. … (あ), (い) (答)

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^2} \text{ より}$$

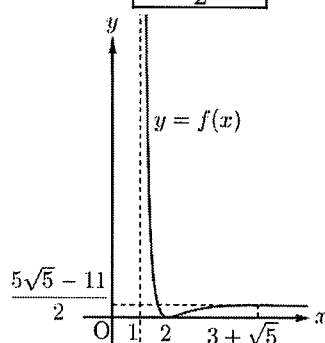
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{-(x-2)(x^2-6x+4)}{x^3(x-1)^2}$$

x	(1)	…	2	…	$3 + \sqrt{5}$	…
$f'(x)$		–	0	+	0	–
$f(x)$		↘	0	↗	極大	↘

となるから, $x = \boxed{3 + \sqrt{5}}$ で極大値をとり, 極大値は … (う) (答)

$$\begin{aligned} f(3 + \sqrt{5}) &= \frac{1}{2 + \sqrt{5}} - \frac{4}{(3 + \sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5} - 2 - \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \\ &= \boxed{\frac{5\sqrt{5} - 11}{2}}. \end{aligned}$$

… (え) (答)



[IV] (つづき)

$f(x) = c$ の解を $\beta (= 3 + \sqrt{5})$, γ とおく.

$$\begin{aligned} c - f(x) &= \frac{cx^2(x-1) - x^2 + 4(x-1)}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{cx^3 - (c+1)x^2 + 4x - 4}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

と表されるので, 3 次方程式

$$cx^3 - (c+1)x^2 + 4x - 4 = 0$$

の 3 解は $x = \beta, \beta, \gamma$ (β は重解) となる. 解と係数の関係より

$$\beta + \beta + \gamma = \frac{c+1}{c}$$

であるから

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{1}{c} - 2\beta \\ &= 1 + \frac{2}{5\sqrt{5} - 11} - 2(3 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{aligned}$$

… (お) (答)

求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\gamma}^{\beta} \left(c - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= \left[cx - \log|x-1| - \frac{4}{x} \right]_{\gamma}^{\beta} \\ &= c(\beta - \gamma) - \log \left| \frac{\beta-1}{\gamma-1} \right| - 4 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \left(3 + \sqrt{5} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \log \left| \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right| - 4 \left(\frac{1}{3+\sqrt{5}} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{-25}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{5} + \log \left(\frac{7 + (-3)\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

… (か) ~ (こ) (答)

(3)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2a}{x^3} = \frac{2}{x^3} \left[a - \frac{x^3}{2(x-1)^2} \right]$$

であり $l(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ とおくと, $l'(x) = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$

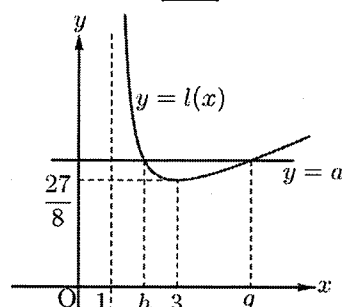
[IV] (つづき 2)

x	(1)	...	3	...
$l'(x)$		-	0	+
$l(x)$		$\searrow$	$\frac{27}{8}$	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1+0} l(x) = \infty$$

となる. $f(x)$ が極値をもつための条件は $f'(x)$ の符号が少なくとも 1 回変化することであり, $l(x)$ の値と a の大小が少なくとも 1 回変化することであるから, 求める条件は

$$a > \boxed{\frac{27}{8}}. \quad \dots (\text{さ}) (\text{答})$$



(4)

以下, $g(a), h(a)$ を g, h と略する. (3) より $\alpha = \frac{27}{8}$, $1 < h < 3 < g$ がわかる.

$$f'(g) = \frac{-g^3 + 2a(g-1)^2}{g^3(g-1)^2} = 0 \text{ より, } g^3 - 2a(g-1)^2 = 0 \text{ が成り立ち, さらに } u = g-3$$

とおくと

$$\begin{aligned} (u+3)^3 - 2a(u+2)^2 &= 0 \\ u^3 + (9-2a)u^2 + (27-8a)u + (27-8a) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, $(u=)g(a)-3$ は t の 3 次方程式

$$t^3 + \boxed{(9-2a)}t^2 + \boxed{(27-8a)}t + \boxed{(27-8a)} = 0 \quad \dots (\text{し}) \sim (\text{せ}) (\text{答})$$

の解である. さらに $b = a - \frac{27}{8}, v = \frac{u}{\sqrt{b}}$ とおくと

$$\begin{aligned} (\sqrt{bv})^3 + \left\{ 9 - 2\left(b + \frac{27}{8}\right) \right\} (\sqrt{bv})^2 - 8b(\sqrt{bv}) - 8b &= 0 \\ 4\sqrt{b}v^3 + (9-8b)v^2 - 32\sqrt{b}v - 32 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $a \rightarrow \alpha + 0$ のとき $b \rightarrow 0, \sqrt{bv}(=u) \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{a \rightarrow \alpha + 0} (9v^2 - 32) = 0$$

[IV] (つづき 3)

となり, $v > 0$ とあわせて考えて $\lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}} = \lim_{a \rightarrow \alpha+0} v = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$ (そ) (答)

$$\begin{aligned} f(g) - f(x) &= \frac{f(g)x^2(x-1) - x^2 + a(x-1)}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{f(g)x^3 - \{f(g)+1\}x^2 + ax - a}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

と表されるので, 3 次方程式

$$f(g)x^3 - \{f(g)+1\}x^2 + ax - a = 0$$

の 3 解は $x = g, g, h$ (g は重解) となる. 解と係数の関係より

$$g + g + h = \frac{f(g)+1}{f(g)}$$

であるから

$$h = 1 + \frac{1}{f(g)} - 2g.$$

ここで

$$\begin{aligned} f(g) &= \frac{1}{g-1} - \frac{a}{g^2} \\ &= \frac{1}{g-1} - \frac{1}{g^2} \cdot \frac{g^3}{2(g-1)^2} = \frac{g-2}{2(g-1)^2} \end{aligned}$$

であるから

$$h = 1 + \frac{2(g-1)^2}{g-2} - 2g = \frac{g}{g-2}$$

が得られる. よって

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{h-3}{\sqrt{a-\alpha}} &= \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{-2(g-3)}{g-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{-2}{u+1} \cdot v = \boxed{-\frac{8\sqrt{2}}{3}}. \end{aligned} \quad \dots \text{(た) (答)}$$

次に $S(a) = \int_h^g \{f(g) - f(x)\} dx$ について考える.

$f(g) - f(x) = 0$ の 3 解が g, g, h であるから

$$\begin{aligned} f(g) - f(x) &= \frac{f(g)(x-g)^2(x-h)}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{(g-2)}{2(g-1)^2} \cdot \frac{(x-g)^2(x-h)}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

と表すことができ, さらに区間 $h \leq x \leq g$ において

[IV] (つづき 4)

$$\frac{(g-2)}{2(g-1)^2} \cdot \frac{(x-g)^2(x-h)}{g^2(g-1)} \leq f(g) - f(x) \leq \frac{(g-2)}{2(g-1)^2} \cdot \frac{(x-g)^2(x-h)}{h^2(h-1)}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \frac{(g-2)}{2(g-1)^3 g^2} \int_h^g (x-g)^2(x-h) dx &\leq S(a) \leq \frac{(g-2)}{2(g-1)^2 h^2(h-1)} \int_h^g (x-g)^2(x-h) dx \\ \frac{(g-2)}{2(g-1)^3 g^2} \cdot \frac{1}{12} (g-h)^4 &\leq S(a) \leq \frac{(g-2)}{2(g-1)^2 h^2(h-1)} \cdot \frac{1}{12} (g-h)^4 \\ \frac{(g-2)}{24(g-1)^3 g^2} \cdot \left(\frac{g-h}{\sqrt{a-\alpha}} \right)^4 &\leq \frac{S(a)}{(a-\alpha)^2} \leq \frac{(g-2)}{24(g-1)^2 h^2(h-1)} \cdot \left(\frac{g-h}{\sqrt{a-\alpha}} \right)^4 \end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$\lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{g-h}{\sqrt{a-\alpha}} = \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \left(\frac{g-3}{\sqrt{a-\alpha}} - \frac{h-3}{\sqrt{a-\alpha}} \right) = 4\sqrt{2}$$

であるから

$$\begin{cases} \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{(g-2)}{24(g-1)^3 g^2} \cdot \left(\frac{g-h}{\sqrt{a-\alpha}} \right)^4 = \frac{1}{24 \cdot 2^3 \cdot 3^2} \cdot (4\sqrt{2})^4 = \frac{16}{27} \\ \lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{(g-2)}{24(g-1)^2 h^2(h-1)} \cdot \left(\frac{g-h}{\sqrt{a-\alpha}} \right)^4 = \frac{1}{24 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} \cdot (4\sqrt{2})^4 = \frac{16}{27} \end{cases}$$

となり

$$\lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{S(a)}{(a-\alpha)^2} = \boxed{\frac{16}{27}}. \quad \dots (\text{ち}) (\text{答})$$

⑨ $F(x) = \frac{H(x)}{G(x)}$ ($G(x), H(x)$ は整式) のとき

$$F'(x) = \frac{H'(x)G(x) - H(x)G'(x)}{\{G(x)\}^2}$$

であるから、 $G(x_0) \neq 0$ を満たす x_0 に対して

$$\begin{aligned} \begin{cases} F(x_0) = 0 \\ F'(x_0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} H(x_0) = 0 \\ H'(x_0)G(x_0) = H(x_0)G'(x_0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H(x_0) = 0 \\ H'(x_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $y = F(x)$ のグラフが $(x_0, 0)$ で x 軸に接することと $y = H(x)$ のグラフが $(x_0, 0)$ で x 軸に接することが必要十分であることがわかる。

(2), (3)において解と係数の関係を用いているが、例えば(2)の場合

[IV] (つづき 5)

$y = f(x)$ と $y = c$ のグラフが $x = \beta (= 3 + \sqrt{5})$ で接する

$\Leftrightarrow y = c - f(x)$ のグラフが $x = \beta$ で x 軸に接する

$\Leftrightarrow H(x) = cx^3 - (c+1)x^2 + 4x - 4$ は $H(\beta) = H'(\beta) = 0$ を満たす

$\Leftrightarrow H(x)$ は $(x - \beta)^2$ を因数にもつ

と考えている.

上記の考えを認めるならば, (1)についても $f(x) = \frac{x^2 - ax + a}{x^2(x-1)}$ の分子の 2 次関数が

完全平方式になる a の値を求めればよいことがわかる.

⑨ $\lim_{a \rightarrow \alpha+0} \frac{g(a) - 3}{\sqrt{a - \alpha}}$ に関しては次のような方法もある.

(方法 1)

$b = a - \frac{27}{8}$ とおくと, $u^3 + \left(\frac{9}{4} - b\right)u^2 - 8bu - 8b = 0$ と表されるから

$$\frac{u^2}{b} = \frac{8(u+1)}{u-b+\frac{9}{4}}$$

と変形して $\lim_{a \rightarrow \alpha+0} b = \lim_{a \rightarrow \alpha+0} u = 0$ を用いる.

(方法 2)

$$a = \frac{g^3}{2(g-1)^2} \text{ を代入して, } \frac{g-3}{\sqrt{a-\frac{27}{8}}} = \frac{g-3}{\sqrt{\frac{g^3}{2(g-1)^2} - \frac{27}{8}}} = \dots = \frac{2\sqrt{2}(g-1)}{\sqrt{4g-3}}$$

と変形して $\lim_{a \rightarrow \alpha+0} g = 3$ を用いる.