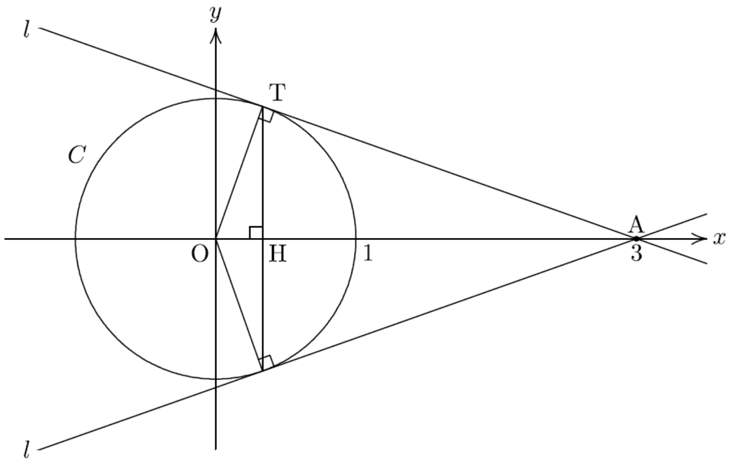
1

(1) C と l が第 1 象限で接するときの接点を T とし，T から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．



$\triangle$ OAT $\backsim$ $\triangle$ OTH なので，OA : OT = OT : OH，すなわち，3 : 1 = 1 : (T の x 座標) であるから，

$$(\text{T の } x \text{ 座標}) = \boxed{\frac{1}{3}}. \qquad \cdots(ア)(答)$$

(2) l の方程式は $y = t(x-3)$，すなわち，$tx - y - 3t = 0$ より，C の中心 O と l の距離を d とすると，

$$d = \frac{|-3t|}{\sqrt{t^2 + (-1)^2}} = \frac{3|t|}{\sqrt{t^2+1}}. \qquad \cdots①$$

C の半径は 1 なので，C と l が異なる 2 点で交わるための条件は

$$d < 1 \qquad \cdots②$$

であり，これに ① を代入して整理すると，$3|t| < \sqrt{t^2+1}$，すなわち，$9|t|^2 < (\sqrt{t^2+1})^2$．

これより，$8t^2 - 1 < 0$ となるので，C と l が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲は

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}} < t < \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}. \qquad \cdots(イ)(ウ)(答)$$

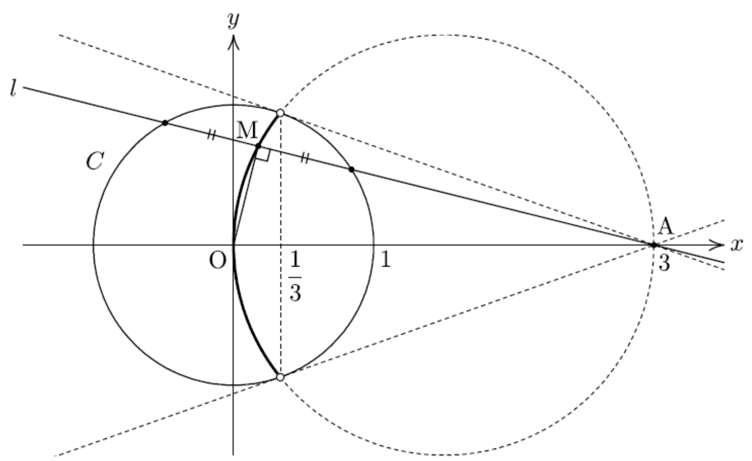
(3) OM $\perp l$ なので，OM $= d$ であり，これに ① を代入することにより，

$$\text{OM} = \boxed{\frac{3|t|}{\sqrt{t^2+1}}}. \qquad \cdots(エ)(答)$$

1 (つづき 1)

(4) C と l が異なる 2 点で交わるとき，$t \neq 0$ ならば M はつねに $\angle\mathrm{OMA} = 90^\circ$ を満たし，$t = 0$ ならば M と O は一致する．

このことと M が C の内部にあることより，M の軌跡は，線分 OA を直径とする円のうち，C の内部に含まれている部分となる．



線分 OA を直径とする円について，中心は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，半径は $\dfrac{3}{2}$ であるから，方程式は

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

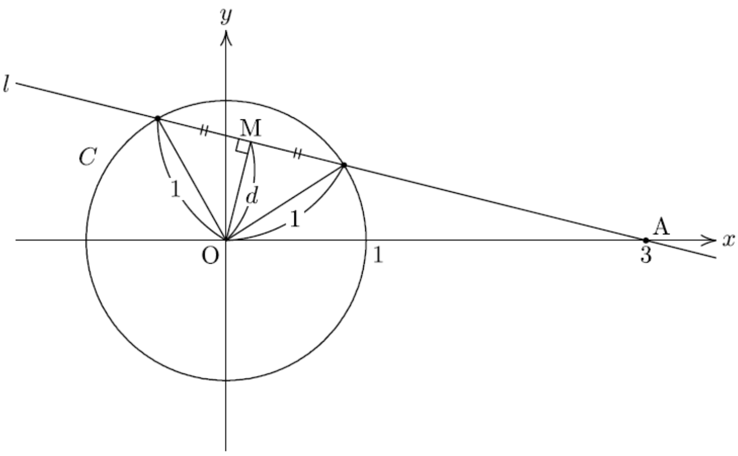
すなわち，

$$\boxed{x^2 + y^2 - 3x} = 0. \qquad \cdots(\text{オ})(\text{答})$$

また，(1) の結果より，線分 OA を直径とする円のうち，C の内部に含まれている部分は $0 \leqq x < \dfrac{1}{3}$ を満たす部分である．

1 (つづき 2)

(5)



底面の半径が d，高さが $\sqrt{1-d^2}$ の円錐の体積の 2 倍が V と等しいから，$V=\left(\dfrac{1}{3}\pi d^2\sqrt{1-d^2}\right)\cdot 2$.

これより，$V=\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{d^4(1-d^2)}$ であるから，$u=d^2$ とおくと，$V=\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{u^2(1-u)}$.

なお，② より，$0\leqq u<1$ である.

さらに，$f(u)=u^2(1-u)$ とおくと，$f(u)=u^2-u^3$ となるから，$f'(u)=2u-3u^2=-u(3u-2)$.

よって，$f(u)$ の $0\leqq u<1$ における増減は次の表のようになる.

u	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

以上より，V が最大となる t の値は $u=\dfrac{2}{3}$ を満たす t の値である.

$u=\dfrac{2}{3}$ より，$d^2=\dfrac{2}{3}$ であり，これに ① を代入すると，$\left(\dfrac{3|t|}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2=\dfrac{2}{3}$.

これを整理すると，$27t^2=2(t^2+1)$，すなわち，$t^2=\dfrac{2}{25}$ となるから，V が最大となる t の値は

$$t=\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{5}}.$$

$\cdots$(カ)(答)

1 (つづき 3)

【(4) の参考】

次のようにして，M の軌跡を求めてもよい．

C と l が異なる 2 点で交わるとき，(2) の結果より，

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}<t<\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \cdots ③$$

であり，C と l の 2 つの交点の x 座標を α，β とおくと，α，β は，$x^2+\{t(x-3)\}^2=1$，すなわち，$(t^2+1)x^2-6t^2x+9t^2-1=0$ の 2 つの解である．

C と l の 2 つの交点を結ぶ線分の中点が M であるから，M(X,Y) とおくと，$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．

さらに，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{6t^2}{t^2+1}$ であるから，

$$X=\frac{3t^2}{t^2+1}. \qquad \cdots ④$$

また，M は l 上にあるから，$Y=t(X-3)$ であり，M が C の内部にあることから，

$$X<3 \qquad \cdots ⑤$$

なので，

$$t=\frac{Y}{X-3}. \qquad \cdots ⑥$$

⑥ を ④ に代入すると，$X=\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{Y}{X-3}\right)^2}{\left(\dfrac{Y}{X-3}\right)^2+1}$，すなわち，$(X-3)(X^2+Y^2-3X)=0$ となり，

このことと ⑤ より，$X^2+Y^2-3X=0$，すなわち，

$$\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+Y^2=\frac{9}{4}. \qquad \cdots ⑦$$

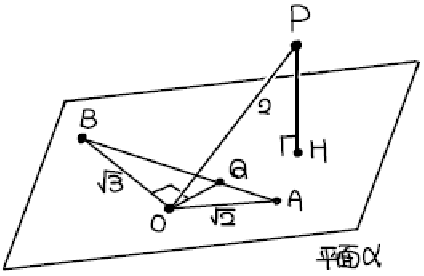
また，⑥ を ③ に代入すると，$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}<\dfrac{Y}{X-3}<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり，これと ⑤ より，

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(X-3)>Y>\frac{\sqrt{2}}{4}(X-3). \qquad \cdots ⑧$$

⑤，⑦，⑧ より，M の軌跡は円 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ の「$x<3$ と $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-3)>y>\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-3)$ をともに満たす部分」であるとわかり，その部分は (4) の【解答】の図の太線の部分と一致する．

((4) の参考終り)

2



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$

とおくと、条件より，

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{p}|=2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，　$\vec{b}\cdot\vec{p}=-2$

(1)　$\cos\angle POB=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|\vec{b}||\vec{p}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}\cdot 2}=\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　　…(キ)(答)

(2)　$t=\dfrac{AQ}{AB}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}\\&=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\\&=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\end{aligned}$$

よって．$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OB}$ より、$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0$

よって　$-2(1-t)+3t=0$　より，$t=\dfrac{2}{5}$　($0\leqq t\leqq 1$ をみたす)　　…(答)

(3)　(2)より、$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$　なので，

$$OQ^2=|\overrightarrow{OQ}|^2=\frac{1}{25}|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=\frac{1}{25}\{9\cdot 2+12\cdot(-2)+4\cdot 3\}=\frac{1}{25}\cdot 2\cdot 3(3-4+2)=\frac{6}{25}$$

よって．$OQ=\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{5}}$　　…(ク)(答)

(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH}\perp(\text{平面}\alpha)&\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\\\overrightarrow{PH}\cdot\vec{b}=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}(k\overrightarrow{OQ}+l\vec{b}-\vec{p})\cdot\overrightarrow{OQ}=0\\(k\overrightarrow{OQ}+l\vec{b}-\vec{p})\cdot\vec{b}=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{25}k+0-\vec{p}\cdot\overrightarrow{OQ}=0 & \cdots①\\0+3l+2=0 & \cdots②\end{cases}\end{aligned}$$

よって②より、$l=\boxed{-\dfrac{2}{3}}$　　…(ケ)(答)

2 （つづき）

(5) ①より，$\vec{p}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{6}{25}k$

$$\vec{p}\cdot\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right) = \frac{6}{25}k$$

$$15\vec{p}\cdot\vec{a} - 20 = 6k$$

よって　$\vec{p}\cdot\vec{a} = \frac{2}{5}k+\frac{4}{3}$　…①′

また，点Pが平面α上より、P＝H であるので，

$$|\overrightarrow{OH}|=2 \Leftrightarrow \left|k\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{25}k^2+0+\frac{4}{3} = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\frac{10}{3}$$

よって①′に代入して，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = \boxed{0},\ \boxed{\frac{8}{3}}$$　…（コ）（サ）（答）

〔コ，サの別解〕

Pが平面α上にあるとき，実数m.nを用いて $\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$ と表せ，

$\vec{b}\cdot\vec{p}=-2$ より，$\vec{b}\cdot(m\vec{a}+n\vec{b})=-2$　よって，$-2m+3n=-2$　…③

$|\vec{p}|=2$ より，$|m\vec{a}+n\vec{b}|^2=2^2$　よって，$2m^2-4mn+3n^2=4$　…④

③，④を解くと，$(m,n)=(-2,-2),\ \left(2,\frac{2}{3}\right)$

$(m,n)=(-2,-2)$ のとき，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(-2\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{a}=-4+4=0$

$(m,n)=\left(2,\frac{2}{3}\right)$ のとき，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

以上より、$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\boxed{0},\ \boxed{\frac{8}{3}}$　**〔コ，サの別解終り〕**

３

(1) $$ab=0 \iff a=0 \text{ または } b=0$$
であるから，$a=0$ の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ と，$b=0$ の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ の和から，重複している $a=0$ かつ $b=0$ の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ を引けばよい．よって，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}} \qquad \cdots (シ)(答)$$

となる．

$a+b=n$ ということは，硬貨を $2n$ 回投げたとき表が n 回だけ出るということなので，

$$M_n={}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{2n(2n-1)\times\cdots\times(n+2)(n+1)}{n!} \text{ 通り．}$$

$n=5$ を代入して

$$M_5=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{120}=\boxed{252} \text{ 通り} \qquad \cdots (ス)(答)$$

となる．

区分求積の公式より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{n!}{n^n}M_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{2n(2n-1)\times\cdots\times(n+2)(n+1)}{n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2n(2n-1)\times\cdots\times(n+2)(n+1)}{n\cdot n\times\cdots\times n\cdot n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(1+\frac{n}{n}\right)\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1\log(1+x)\,dx\\ &= \Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1 \qquad \text{(部分積分を用いた)}\\ &= \boxed{2\log 2-1} \qquad \cdots (セ)(答)\end{aligned}$$

(2) n 回投げて表が c 回出る確率は，$n=4$ のとき，

$${}_4\mathrm{C}_c\left(\frac{1}{2}\right)^c\left(\frac{1}{2}\right)^{4-c}=\frac{{}_4\mathrm{C}_c}{2^4}$$

となる．よって，

$c=0$ かつ D (後半に 1 回投げて表が 0 回) の確率は，$\frac{{}_4\mathrm{C}_0}{2^4}\left(\frac{1}{2}\right)^1={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5$，

$c=1$ かつ D (後半に 2 回投げて表が 0 回) の確率は，$\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{2^4}\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5$，

$$\vdots$$

$c=4$ かつ D (後半に 4 回投げて表が 0 回) の確率は，$\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{2^4}\left(\frac{1}{2}\right)^4={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5$

である．

3　(つづき)

D となる確率 $P(D)$ は，これら5個を足すと求まる．二項定理より

$$\begin{aligned}P(D) &= \sum_{c=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_c \left(\frac{1}{2}\right)^c \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \boxed{\frac{81}{512}}\end{aligned}$$

$\cdots$ (ソ)(答)

n 回投げて表が c 回出る確率は，一般の n のとき，

$$ {}_n\mathrm{C}_c \left(\frac{1}{2}\right)^c \left(\frac{1}{2}\right)^{n-c} = \frac{{}_n\mathrm{C}_c}{2^n}$$

となる．先ほどと同様にして，

$$\begin{aligned}P(D) &= \sum_{c=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_c}{2^n} \left(\frac{1}{2}\right)^{c+1} \\ &= \sum_{c=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_c \left(\frac{1}{2}\right)^c \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

となる．

$$P(C\cap D) = \frac{{}_n\mathrm{C}_0}{2^n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

であるから，条件付き確率の定義式に代入して，

$$\begin{aligned}P_D(C) &= \frac{P(C\cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \\ &= \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

$\cdots$ (タ)(答)

4

(1)　Mを表す複素数は $\underline{\mu=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}$ である。

$p>0$ なので与式は $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}+\dfrac{\alpha-\gamma}{2p}i$ と変形できて，

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ に対応する複素数は，それぞれ $\gamma-\alpha$, $\mu-\beta=\dfrac{\gamma-\alpha}{2p}i$ と表せる。

よって $\dfrac{\mu-\beta}{\gamma-\alpha}=\dfrac{1}{2p}i$ は純虚数となり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ である。　（証明終り）

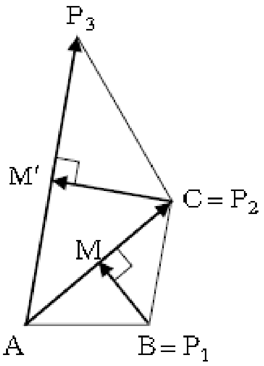
(2)　$\mathrm{P}_n(z_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \ \mathrm{P}_1=\mathrm{B},\ \mathrm{P}_2=\mathrm{C})$ とする。

(1)より AP_2 の中点Mに対して，$\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP_2}}$ を $\dfrac{1}{2p}$ 倍して $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したものであり，

さらに $|\alpha-\gamma|=\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2A}}\right|=p$ から $\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}\right|=\dfrac{1}{2}$ なので

右図のような位置関係にある。よって

$$\triangle\mathrm{AP_1P_2}=S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot p=\boxed{\frac{p}{4}}$$ … (チ)(答)



全く同様に AP_3 の中点M′に対して

$\mathrm{P_2M'}\perp\mathrm{AP_3}$ かつ $\mathrm{P_2M'}:\mathrm{AP_3}=1:2p$ を満たすから，

$\triangle\mathrm{AP_1P_2}\backsim\triangle\mathrm{AP_2P_3}$ であり，相似比は

$$\mathrm{AP_1}:\mathrm{AP_2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}:p=\sqrt{p^2+1}:2p$$

なので　$\triangle\mathrm{AP_2P_3}=S_2=S_1\times\left(\dfrac{2p}{\sqrt{p^2+1}}\right)^2=\boxed{\dfrac{p^3}{p^2+1}}$ … (ツ)(答)

(3)　$p=\sqrt{3}$ のとき，(2)と同様に $S_{n+1}=\dfrac{4p^2}{p^2+1}S_n=3S_n$ が成り立つので，数列 $\{S_n\}$ は

公比 3 の等比数列であり，$\dfrac{S_n}{S_1}=\boxed{3^{n-1}}$ … (テ)(答)

４（つづき）

(4)　条件「α，β は $\alpha<\beta$ を満たす実数」から $\arg(z_1-\alpha)=0$ であり，

$p=\sqrt{3}$ から $\tan\angle \mathrm{P}_n\mathrm{A}\,\mathrm{P}_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{A}\,\mathrm{P}_{n+1}=\dfrac{\pi}{6}$ 。

(2)の図のベクトルの向きも考慮して $\arg(z_{n+1}-\alpha)=\arg(z_n-\alpha)+\dfrac{\pi}{6}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

よって

$$\arg(z_n-\alpha)=0+\frac{\pi}{6}(n-1)=\frac{n-1}{6}\pi\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

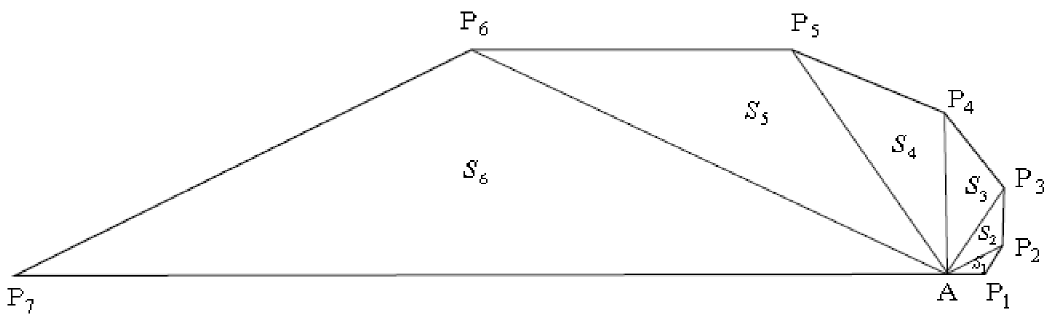
z_{N+1} が実数ならば $z_{N+1}-\alpha$ も実数で，その条件は

$$\arg(z_{N+1}-\alpha)=\frac{N}{6}\pi=k\pi\quad から\quad N=6k\ （k は整数）$$

これを満たす最小の正の整数は $N=6$ であり，
求める多角形の面積 T は

$$T=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=S_1\cdot\frac{3^6-1}{3-1}=364S_1$$

$|\alpha-\gamma|=\sqrt{3}$ から $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ なので，$T=\boxed{91\sqrt{3}}$　　　… (ト)(答)



【補足】(1)の中点Mを表す複素数は，例えば与式から $\gamma=\dfrac{2p\beta-(p+i)\alpha}{p-i}$ を $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ に代入した

$\mu=\dfrac{p\beta-i\alpha}{p-i}$ や，逆に α を消去した $\mu=\dfrac{p\beta+i\gamma}{p+i}$ なども正解である。

5

(1)

$$\{f(a)\}^3 = (\cos a + i\sin a)^3 = \cos 3a + i\sin 3a$$

よって θ_1 の一つは $\theta_1 = \boxed{3a}$ …(ナ)(答)

また

$$\frac{f(\theta_2)+f(-\theta_2)}{2} = \frac{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 + \cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{2} = \cos\theta_2$$

であり

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$

であるから, θ_2 の一つは $\theta_2 = \boxed{2a}$ …(ニ)(答)

(2)

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\\ &= \frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}(1+\cos 4\theta)\\ &= \boxed{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta} \qquad \cdots(\text{ヌ})(\text{答})\end{aligned}$$

(3)

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると, $0 \leqq y \leqq x$ の領域に点があることを考えれば

$$r \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4} \qquad \cdots(*)\text{としてよい}$$

条件式に代入すると,

$$\begin{aligned}(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^3 &= (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)^2\\ r^6 &= (r^2\cos 2\theta)^2\\ r^6 &= r^4\cos^2 2\theta\end{aligned}$$

よって $r = 0$ または $r^2 = \cos^2 2\theta$

(*) より $r = 0$ または $r = \cos 2\theta$ であるが

$r = \cos 2\theta$ に $r = 0$ は含まれるので求める極方程式は $\boxed{r = \cos 2\theta}$ …(ネ)(答)

ただし, $\boxed{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}}$ …(ノ)(答) である

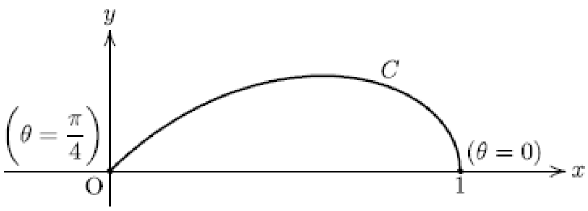
5 (つづき 1)

よって，C 上の点 $(x,\ y)$ は，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす θ を用いて，$x = \cos 2\theta \cos\theta$，$y = \cos 2\theta \sin\theta$ と表せる．

このとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta$ であるから，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ において，$\dfrac{dx}{d\theta} < 0$ となる．

したがって，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において θ の値が増加すると，x は減少する．

このことと，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において $y > 0$ であること，および，$\theta = 0$ のとき $(x,\ y) = (1,\ 0)$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $(x,\ y) = (0,\ 0)$ であることより，C の概形は次のようになる．



よって，C と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 y\ dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos 2\theta \sin\theta(-2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta)\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta \sin^2\theta)\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2\theta\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2}\sin^2 2\theta(\sin 2\theta)' + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta - \frac{1}{4}\cos 4\theta\cos 2\theta\right\}\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2}\sin^2 2\theta(\sin 2\theta)' + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos 2\theta)\right\}\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2}\sin^2 2\theta(\sin 2\theta)' + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta - \frac{1}{8}\cos 6\theta\right\}\ d\theta \\
&= \left[\frac{1}{6}\sin^3 2\theta + \frac{1}{4}\theta - \frac{3}{16}\sin 2\theta + \frac{1}{16}\sin 4\theta - \frac{1}{48}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \boxed{\frac{\pi}{16}}.
\end{aligned}
$$

$\cdots$(ハ)(答)

5 (つづき 2)

((3) の参考)

曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を次のようにして求めることもできる

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos^2 2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\theta}{4} d\theta = \left[\frac{1}{4}\theta + \frac{\sin 4\theta}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$$

((3) の参考終り)

(注)

(3) の C の極方程式と θ の動く範囲は $r = -\cos 2\theta$ ($\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi$) 等も考えられる