I.

(i) 3 日間の練習回数の平均値は,

$$\frac{1}{3}(100+110+90)=100.$$

3 日間の練習回数の分散は,

$$\frac{1}{3}\left\{(100-100)^2+(110-100)^2+(90-100)^2\right\}=\underline{\frac{200}{3}}. \qquad \cdots(1)\sim(4)(答)$$

また, 4 日間の練習回数の平均値は,

$$\frac{1}{4}(100+110+90+100)=100.$$

4 日間の練習回数の分散は,

$$\frac{1}{4}\left\{(100-100)^2+(110-100)^2+(90-100)^2+(100-100)^2\right\}=\underline{50}. \qquad \cdots(5)(6)(答)$$

(ii)

$$\log_x y+3\log_y x \leqq 4.$$

$$\log_x y+\frac{3}{\log_x y} \leqq 4.$$

$x>1,\ y>1$ より, $\log_x y>0$ であるから,

$$(\log_x y)^2-4\log_x y+3 \leqq 0.$$

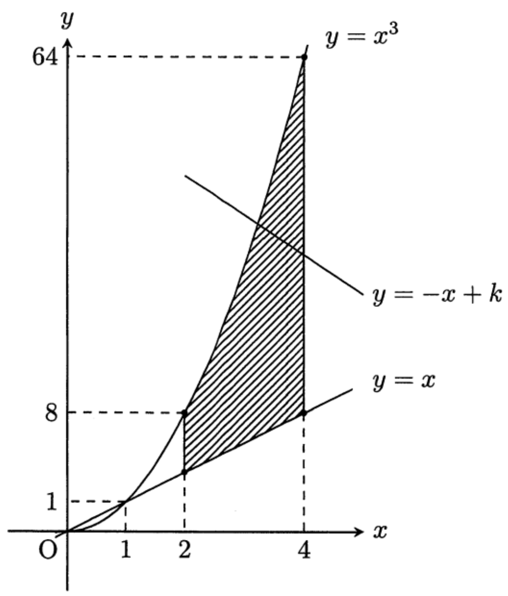
$$(\log_x y-1)(\log_x y-3) \leqq 0.$$

$$1 \leqq \log_x y \leqq 3.$$

$x>1$ より,

$$x \leqq y \leqq x^3.$$

これと, $2 \leqq x \leqq 4,\ y>1$ が表す領域を図示すると次のようになる.(図の斜線部境界を含む)



I (つづき 1)

ここで, $x+y=k$ とおく. $y=-x+k$ は xy 平面上で傾き -1, y 切片 k の直線を表し, これが領域と共有点をもつような場合を調べればよい. k が最大となるのは, この直線が 点 $(4, 64)$ を通るときであるから, 求める最大値は,

$$4+64=\underline{68}. \qquad \cdots(7)(8)(答)$$

(iii)

$$\frac{3-n}{n+3}a_n=-a_n+\frac{n}{2}.$$

$$\left(\frac{3-n}{n+3}+1\right)a_n=\frac{n}{2}.$$

$$\frac{6}{n+3}a_n=\frac{n}{2}.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n(n+3)}{12}\\&=\underline{\frac{1}{12}n^2+\frac{1}{4}n}.\end{aligned} \qquad \cdots(9)\sim(13)(答)$$

このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{12}k^2+\frac{1}{4}k\right)\\&=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{36}n(n+1)(n+5)\\&=\underline{\frac{1}{36}n^3+\frac{1}{6}n^2+\frac{5}{36}n}.\end{aligned} \qquad \cdots(14)\sim(21)(答)$$

(iv)

$$x^2+x-2\leqq 0.$$

$$(x+2)(x-1)\leqq 0.$$

$$-2\leqq x\leqq 1$$

であるから, 実数 x に関する条件 p, q, r は,

$$p: |x|\leqq 1, \quad q: x^2+x-2\leqq 0, \quad r: x<-1$$

より,

$$p: -1\leqq x\leqq 1, \quad q: -2\leqq x\leqq 1, \quad r: x<-1.$$

このとき,

$r \Longrightarrow q$ は偽, $q \Longrightarrow r$ は偽.

よって,

r は q であるための必要条件でも十分条件でもない. $\underline{4}$ $\cdots(22)(答)$

また,

q かつ $\overline{r}$: $-1\leqq x\leqq 1$.

I (つづき 2)

よって,

$$p \text{ は「} q \text{ かつ } \overline{r} \text{」であるための必要十分条件である.} \quad \underline{3} \qquad \cdots(23)(\text{答})$$

さらに,

$$\overline{p} : x < -1, 1 < x, \quad \overline{q \text{ または } r} : x > 1$$

であるから,

$$\overline{p} \Longrightarrow \text{「}\overline{q \text{ または } r}\text{」は偽, 「}\overline{q \text{ または } r}\text{」} \Longrightarrow p \text{ は真.}$$

よって,

$$\overline{p} \text{ は「}\overline{q \text{ または } r}\text{」であるための必要条件であるが十分条件でない.} \quad \underline{1} \qquad \cdots(24)(\text{答})$$

(v)

$$\cos 3\theta - 6\cos^2\theta + 5 = 0.$$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より,

$$4\cos^3\theta - 6\cos^2\theta - 3\cos\theta + 5 = 0.$$

$t = \cos\theta$ とおくと,

$$4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0.$$

$$(t-1)(4t^2 - 2t - 5) = 0.$$

$$t = 1, \frac{1 \pm \sqrt{21}}{4}.$$

ここで, $4 < \sqrt{21} < 5$ であるから,

$$-1 < \frac{1-\sqrt{21}}{4} < -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{4} < \frac{1+\sqrt{21}}{4} < \frac{3}{2}$$

となるので, $0 \leqq \theta < 2\pi$ より, $-1 \leqq t \leqq 1$ から,

$$t = 1, \frac{1-\sqrt{21}}{4}.$$

よって,

$$\cos\theta = \underline{1, \frac{1-\sqrt{21}}{4}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

Ⅱ、

(i)
$$\begin{cases} |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \\ |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

よって，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|} = \dfrac{\frac{8}{3}}{1\cdot 3} = \underline{\dfrac{8}{9}}$　　　…(25),(26)(答)

(ii)　3点 O, B, C が定める平面上の点 (x, y, z) は

$x - ay - bz = 0$　　　…(※)

を満たすとする．

$B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $C(2, 1, 2)$ がこの平面上にあるから

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = 0 \\ 2 - a - 2b = 0 \end{cases}$$　　…(※)'

が成り立ち，これを解くと $a = b = \frac{2}{3}$ であり，(※)より

$\underline{x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0}$．　　　…(27)〜(30)(答)

Ⅱ（つづき 1）

（補足）

3点 O, B, C が定める平面上の点 R(x, y, z) は，実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}s + 2t \\ y = \frac{2}{3}s + t \\ z = \frac{1}{3}s + 2t \end{cases}$$

と表せて，これを（＊）に代入すると

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)s + (2 - a - 2b)t = 0$$

となるから，（＊）が成り立てば，すべての実数 s, t に対して R(x, y, z) は（＊）を満たすことがわかる．

(iii) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{2}{3}s, \frac{2}{3}s, \frac{1}{3}s\right) - (2, 0, 0) = \left(\frac{2}{3}s - 2, \frac{2}{3}s, \frac{1}{3}s\right)$ より

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}s - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}s\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s\right)^2}$$

$$= \underline{\sqrt{s^2 - 4s + 9}}. \quad \cdots ① \qquad \cdots (31), (32)\ （答）$$

Ⅱ．（つづき2）

(iv) $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=(2t-3,\ t,\ 2t)$ より

$$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{(2t-3)^2+t^2+(2t)^2}=\sqrt{9t^2-12t+9}$$

これと①より　$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$ となる条件は

$$s^2-4s+9=9t^2-12t+9$$

$$9t^2-12t-s(s-4)=0$$

$$(3t-s)\{3t+(s-4)\}=0$$

$t=\frac{1}{3}s$ …②　または　$t=-\frac{1}{3}s+\frac{4}{3}$. …③　　…(33)〜(38)(答)

(v) $\overrightarrow{PQ}=\left(2t-\frac{2}{3}s,\ t-\frac{2}{3}s,\ 2t-\frac{1}{3}s\right)$ より

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(2t-\frac{2}{3}s\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}s\right)^2+\left(2t-\frac{1}{3}s\right)^2}$$

$=\sqrt{s^2-\frac{16}{3}st+9t^2}$ …④　　…(39)〜(42)(答)

(vi) $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{PQ}|$ となる条件は ①, ④より

$$s^2-4s+9=s^2-\frac{16}{3}st+9t^2$$

$-4s+9=-\frac{16}{3}st+9t^2$. …⑤

Ⅱ．（つづき3）

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$ かつ $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{PQ}|$ となる条件は

「②かつ⑤」または「③かつ⑤」である．

②かつ⑤より

$$-4s+9=-\frac{16}{3}s\cdot\frac{1}{3}s+9\cdot\left(\frac{1}{3}s\right)^2$$

$$\frac{7}{9}s^2-4s+9=0$$

$$7s^2-36s+81=0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=18^2-7\cdot81=9^2\cdot(-3)<0$ となり，条件を満たす実数sは存在しない．

③かつ⑤より

$$-4s+9=-\frac{16}{3}s\left(-\frac{1}{3}s+\frac{4}{3}\right)+9\cdot\left(-\frac{1}{3}s+\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\frac{25}{9}s^2-\frac{100}{9}s+7=0$$

$$25s^2-100s+63=0$$

$$s=\frac{50\pm\sqrt{50^2-25\cdot63}}{25}=\frac{10\pm\sqrt{37}}{5},\quad t=\frac{10\mp\sqrt{37}}{15}$$

以上より

$$(s,t)=\left(\frac{10\pm\sqrt{37}}{5},\ \frac{10\mp\sqrt{37}}{15}\right)\quad\cdots(答)$$

（以上，複号同順）

Ⅲ

(i)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 16$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f'(4) = 8$ であるから l の方程式は

$y = 8(x-4) + 16 = 8x + 16$

よって，

$g(x) = 8x - 16$　　… (43)～(45)　(答)

(ii)　直線 m の方程式は，$y = 8x$．

よって，m と C の交点の x 座標は，

$x^3 - 6x^2 + 8x + 16 = 8x$

$x^3 - 6x^2 + 16 = 0$

$(x-2)(x^2 - 4x - 8) = 0$

よって，

$x_1 = 2 - 2\sqrt{3}$　　… (46)～(48)　(答)

$x_2 = 2$　　… (49)　(答)

$x_3 = 2 + 2\sqrt{3}$　　… (50)～(52)　(答)

$f(2) = 16$　　… (53)～(54)　(答)

(iii)　$\displaystyle\int_2^4 \{f(x) - g(x)\}dx = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 32)dx$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x\right]_2^4 = (64 - 128 + 128) - (4 - 16 + 64)$$

$= 12$　　… (55)～(56)　(答)

【(iii)の別解】

$\displaystyle\int_2^4 \{f(x) - g(x)\}dx = \int_2^4 (x-4)^2(x+2)dx$

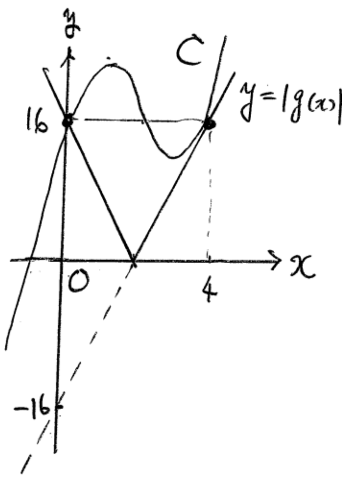
$$= \int_2^4 (x-4)^2(x-4+6)dx = \int_2^4 \{(x-4)^3 + 6(x-4)^2\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-4)^4 + 2(x-4)^3\right]_2^4 = 12$$　… (55)～(56)　(答)

Ⅲ（つづき）

(iv) $g(x)=8(x-2)$ より，

$$|g(x)|=\begin{cases} g(x) & (x \geqq 2), \\ -g(x) & (x<2). \end{cases}$$



$y=|g(x)|$ と曲線 C の共有点の x 座標は，

$$f(x)=|g(x)|$$

の実数解である．
$x \geqq 2$ のとき，

$$f(x)=g(x).$$
$$x^3-6x^2+8x+16=8x-16.$$
$$x^3-6x^2+32=0.$$
$$(x-4)^2(x+2)=0.$$

$x \geqq 2$ から，$x=4$ となり共有点の 1 つは，

$$(4,16).$$

$x<2$ のとき，

$$f(x)=-g(x).$$
$$x^3-6x^2+8x+16=-(8x-16).$$
$$x^3-6x^2+16x=0.$$
$$x(x^2-6x+16)=0.$$

$x<2$ から，$x=0$ となり共有点の 1 つは，

$$\underline{(0,16)}.$$ …(ア)(答)

また，

$$\begin{aligned}\int_0^4\{f(x)-|g(x)|\}dx &= \int_0^2\{f(x)+g(x)\}dx+\int_2^4\{f(x)-g(x)\}dx \\ &= \int_0^2(x^3-6x^2+16x)dx+12 \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+8x^2\right]_0^2+12 \\ &= 20+12 \\ &= \underline{32}.\end{aligned}$$ …(イ)(答)

(v)

$$\begin{aligned}\int_0^2\{f(x)-h(x)\}dx &= \int_0^2\{(x^3-6x^2+8x+16)-8x\}dx \\ &= \int_0^2(x^3-6x^2+16)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+16x\right]_0^2 \\ &= \underline{20}.\end{aligned}$$ …(ウ)(答)

IV.

(i) (a, b) の組の総数は $4\cdot 3$ 通り

$a-b=2$ となる (a, b) の組は

$(a,b)=(3,1), (5,3), (7,5)$ ⋯ ☆

よって、$a-b=2$ となる確率は

$$\frac{3}{4\cdot 3}=\underline{\frac{1}{4}}$$ ⋯ (57), (58) (答)

$|a-b|=2$ となるのは、☆の入れかえた組もあるから、その確率は

$$\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\underline{\frac{1}{2}}$$ ⋯ (59) (60) (答)

(ii) $c-a$ の値を表にまとめる（右表）

(a, c) の組の総数は $4\cdot 4=16$ 通り。

$|a-c|=1$ である確率は $\underline{\dfrac{7}{16}}$ ⋯ (61)〜(63) (答)

c \ a	1	3	5	7
2	1	-1	-3	-5
4	3	1	-1	-3
6	5	3	1	-1
8	7	5	3	1

（$c-a$ の値）

$c-a=1$ となる (a, c) の組は表より

$(a,c)=(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)$

$d-b=1$ となる (b, d) の組も同様であるから

(a, b, c, d) の決め方は $4\cdot 3$ 通り

(a, b, c, d) の組の総数は $4\cdot 3\cdot 4\cdot 3$ であるから

$c-a=d-b=1$ となる確率は $$\frac{4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 4\cdot 3}=\underline{\frac{1}{12}}$$ ⋯ (64)〜(66) (答)

(iii) $|a-c|$ の総和を16で割ればよいので、(ii)の表より

$$\frac{1\times 7+3\times 5+5\times 3+7\times 1}{16}=\underline{\frac{11}{4}}$$ ⋯ (67)〜(69) (答)

IV.（つづき）

(iv)　(ii)より　$P(S)=\dfrac{7}{16}$

$d+b$ の値も (ii) の表と同じになる.

$(a,c)=(1,2)$ or $(7,8)$ のとき,

$|b-d|=1$ となる (b,d) の組は 5通りずつある

d \ b	1	3	5	7
2				
4		○	○	
6			○	○
8				○

$(a,c)=(1,2)$ のとき

d \ b	1	3	5	7
2	○	○		
4		○	○	
6			○	
8				

$(a,c)=(7,8)$ のとき.

$(a,c)=(1,2),(7,8)$ 以外のとき. (a,c) の組は 5通りあり.

$|b-d|=1$ となる (b,d) の組は 4通りずつある.

d \ b	1	3	5	7
2	○			
4				
6			○	○
8				○

例として　$(a,c)=(3,4)$ のとき.

$$\therefore\ P(S\cap T)=\frac{2\times5+5\times4}{3\cdot4\cdot3\cdot4}=\frac{5}{24}$$

よって求める条件付き確率は

$$P_S(T)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{16}}=\underline{\frac{10}{21}}\ \cdots(10)\sim(13)\text{（答）}$$