

1

$$\alpha^2 + \beta^2 = 19, \alpha^4 + \beta^4 = 343, 0 < \alpha < \beta$$

$$s = \alpha + \beta, \quad t = \alpha\beta \text{ とおく.}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2t = 19 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \alpha^4 + \beta^4 = 343 \text{ より}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 343$$

$$19^2 - 2t^2 = 343$$

$$t^2 = 9$$

$$\alpha, \beta > 0 \text{ より } t > 0 \text{ なので}$$

$$\alpha\beta = t = \boxed{3}$$

... (1)(答)

① に代入すると

$$s^2 - 6 = 19$$

$$s^2 = 25$$

$$\alpha, \beta > 0 \text{ より } s > 0 \text{ なので}$$

$$\alpha + \beta = s = \boxed{5}$$

... (2)(答)

$$\alpha, \beta \text{ は } x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ の 2 解なので}$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \dots \textcircled{2}$$

また

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 5^3 - 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$= 125 - 45$$

$$= \boxed{8} \boxed{0}$$

... (3)(4)(答)

$$I = \int_{-\alpha}^{\beta} \left(\frac{4}{19}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{8}{5} \right) dx$$

とおく.

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^4}{19} + \frac{x^3}{10} - \frac{8}{5}x \right]_{-\alpha}^{\beta} \\ &= \left(\frac{\beta^4}{19} + \frac{\beta^3}{10} - \frac{8}{5}\beta \right) - \left(\frac{\alpha^4}{19} - \frac{\alpha^3}{10} + \frac{8}{5}\alpha \right) \\ &= \frac{\beta^4 - \alpha^4}{19} + \frac{\beta^3 + \alpha^3}{10} - \frac{8}{5}(\beta + \alpha) \end{aligned}$$

1(つづき 1)

ところで

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 3, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 19$$

であり, また ② より

$$\beta - \alpha = \sqrt{13}$$

よって

$$\begin{aligned}\beta^4 - \alpha^4 &= (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) \\ &= \sqrt{13} \cdot 5 \cdot 19 = 95\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 3 \cdot 5 = 125 - 45 = 80\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}I &= \frac{95\sqrt{13}}{19} + \frac{80}{10} - \frac{8}{5} \cdot 5 \\ &= 5\sqrt{13} + 8 - 8 \\ &= \boxed{5} \sqrt{\boxed{1} \boxed{3}}\end{aligned}$$

…(5)(6)(7)(答)

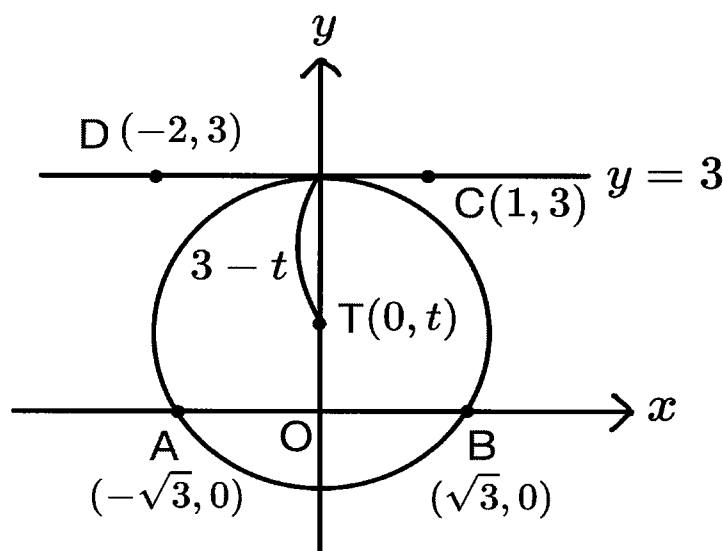
[1](2)

求める円を K とし, K の中心を T とおく。

K の中心は 2 点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるので, T は y 軸上にある。

よって, $T(0, t)$ (ただし $0 < t < 3$) とおく。

また直線 CD の方程式は $y = 3$ であり, K が直線 CD に接することから, K の半径は $3 - t$ である。



ゆえに、 K の方程式は

$$x^2 + (y - t)^2 = (3 - t)^2$$

を表せる。これが $B(\sqrt{3}, 0)$ を通る条件は,

$$(\sqrt{3})^2 + (-t)^2 = (3 - t)^2$$

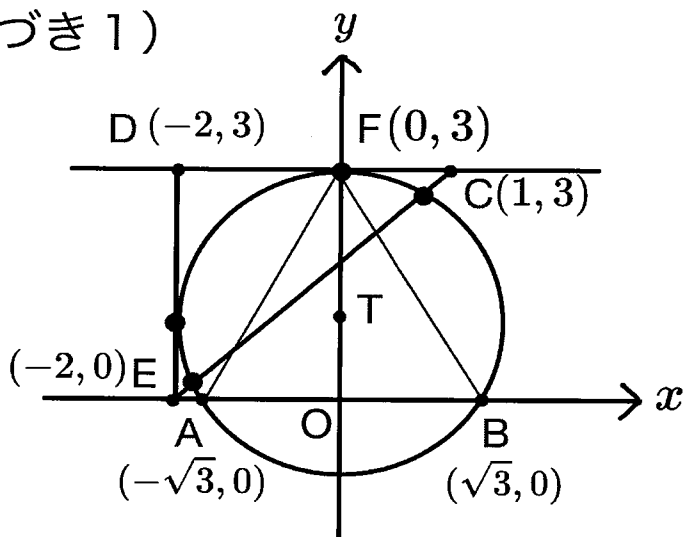
$$3 + t^2 = 9 - 6t + t^2$$

$$t = 1$$

したがって, K の方程式は

$$(x - \boxed{0})^2 + (y - \boxed{1})^2 = \boxed{4} \quad \cdots (8) \sim (10) \quad (\text{答})$$

[1](2) (つづき 1)



次に, $F(0, 3)$ とおく。このとき $\triangle ABF$ は一辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形であり, $\angle AFB = 60^\circ$ である。よって円周角の定理から, $\triangle CDE$ の辺上にあり $\angle APB = 60^\circ$ を満たす点は, $\triangle CDE$ と円 K の共有点である。図から, そのような点の個数は $\boxed{4}$ 個 $\dots(11)(\text{答})$

そのうち, x 座標が最大であるものは, 円 K と直線 CE の交点である。直線 CE の方程式は $y = x + 2$ であるから, K の方程式と連立すると,

$$x^2 + (x + 2 - 1)^2 = 4$$

$$2x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \text{ のとき } y = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \text{ より,}$$

$$\left(\frac{-\boxed{1} + \sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{3} + \sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}} \right) \dots(12) \sim (17)(\text{答})$$

[2]

(1) 漸化式を繰り返し用いると

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{6}{5}a_1 - \frac{9}{10}b_1 = -\frac{6}{5} \cdot 4 - \frac{9}{10} \cdot 3 = -\frac{15}{2}, \\ b_2 = \frac{9}{10}a_1 - \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10} \cdot 4 - \frac{6}{5} \cdot 3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = -\frac{3}{2}a_2 = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{45}{4}, \\ b_3 = \frac{3}{2}b_2 = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

よって

$$a_2 = -\frac{\boxed{15}}{\boxed{2}}. \quad \dots(18)(19)(20) \text{ (答)}$$

また

$$b_3 = \boxed{0}. \quad \dots(21) \text{ (答)}$$

(2) 漸化式を繰り返し用いると

$$\begin{cases} a_4 = -\frac{6}{5}a_3 - \frac{9}{10}b_3 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{45}{4} - \frac{9}{10} \cdot 0 = -\frac{27}{2}, \\ b_4 = \frac{9}{10}a_3 - \frac{6}{5}b_3 = \frac{9}{10} \cdot \frac{45}{4} - \frac{6}{5} \cdot 0 = \frac{81}{8}. \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 = -\frac{3}{2}a_4 = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{27}{2}\right) = \frac{81}{4}, \\ b_5 = \frac{3}{2}b_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{8} = \frac{243}{16}. \end{cases}$$

$$r = \frac{a_5}{a_1} \text{ とすると}$$

$$r = \frac{\frac{81}{4}}{4} = \frac{\boxed{81}}{\boxed{16}}. \quad \dots(22) \sim (25) \text{ (答)}$$

また

$$\frac{b_5}{b_1} = \frac{\frac{243}{16}}{3} = \frac{81}{16} = \boxed{1} \cdot r. \quad \dots(26) \text{ (答)}$$

(3) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= -\frac{6}{5}a_{n+3} - \frac{9}{10}b_{n+3} \\ &= -\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)a_{n+2} - \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{2}b_{n+2} \\ &= \frac{9}{5} \left(-\frac{6}{5}a_{n+1} - \frac{9}{10}b_{n+1}\right) - \frac{27}{20} \left(\frac{9}{10}a_{n+1} - \frac{6}{5}b_{n+1}\right) \\ &= -\frac{27}{8} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)a_n \\ &= \frac{81}{16}a_n. \end{aligned}$$

[2] (つづき 1)

$$\begin{aligned}
 b_{n+4} &= \frac{9}{10}a_{n+3} - \frac{6}{5}b_{n+3} \\
 &= \frac{9}{10} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)a_{n+2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2}b_{n+2} \\
 &= -\frac{27}{20} \left(-\frac{6}{5}a_{n+1} - \frac{9}{10}b_{n+1}\right) - \frac{9}{5} \left(\frac{9}{10}a_{n+1} - \frac{6}{5}b_{n+1}\right) \\
 &= \frac{27}{8} \cdot \frac{3}{2}b_n \\
 &= \frac{81}{16}b_n.
 \end{aligned}$$

よって

$$a_{n+4} = \frac{81}{16}a_n, \quad b_{n+4} = \frac{81}{16}b_n. \quad \dots \textcircled{1}$$

n が奇数のとき

$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{3}{2}a_{n-1}, \quad b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} \text{ より} \\
 a_{n-1} &= -\frac{2}{3}a_n, \quad b_{n-1} = \frac{2}{3}b_n.
 \end{aligned}$$

これと、 $\textcircled{1}$ を用いると

$$a_{n+4} = -\frac{3}{2}a_{n+3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{81}{16}a_{n-1} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{81}{16} \left(-\frac{2}{3}\right)a_n = \frac{81}{16}a_n,$$

$$b_{n+4} = \frac{3}{2}b_{n+3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{16}b_{n-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{16} \cdot \frac{2}{3}b_n = \frac{81}{16}b_n.$$

よって

$$a_{n+4} = \frac{81}{16}a_n, \quad b_{n+4} = \frac{81}{16}b_n. \quad (\text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$a_{n+4} = \frac{81}{16}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad b_{n+4} = \frac{81}{16}b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_n b_n \text{ であるから}$$

$$c_{n+4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+3} a_{n+4} b_{n+4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+3} \frac{81}{16}a_n \cdot \frac{81}{16}b_n = 81 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a_n b_n = 81c_n.$$

よって

$$c_{n+4} = \boxed{81} c_n \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad \dots \textcircled{3} \quad \dots (27)(28) \quad (\text{答})$$

[2] (つづき 2)

$$(4) \quad c_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 a_1 b_1 = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12.$$

$$c_2 = \frac{4}{3} a_2 b_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) \cdot 0 = 0.$$

$$c_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 a_3 b_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{45}{4} \cdot 0 = 0.$$

$$c_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 a_4 b_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{27}{2}\right) \cdot \frac{81}{8} = -324.$$

これより

$$T_1 = \sum_{i=1}^4 c_i = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 12 + 0 + 0 + (-324) = -\boxed{312}. \quad \dots (29)(30)(31) \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \sum_{i=4(k+1)-3}^{4(k+1)} c_i \\ &= c_{4k+1} + c_{4k+2} + c_{4k+3} + c_{4k+4} \\ &= 81(c_{4k-3} + c_{4k-2} + c_{4k-1} + c_{4k}) \quad (\textcircled{3} \text{より}) \\ &= 81 T_k. \end{aligned}$$

よって

$$T_{k+1} = \boxed{81} T_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad \dots (32)(33) \text{ (答)}$$

(5) S_{4m} は初項 $T_1 = -312$, 公比 81 の等比数列の m 個の和であるから

$$S_{4m} = \frac{-312(1 - 81^m)}{1 - 81} = \frac{39}{10}(1 - 81^m).$$

よって

$$u = \frac{\boxed{39}}{\boxed{10}}, \quad \dots (34) \sim (37) \text{ (答)}$$

$$v = \boxed{81}. \quad \dots (38)(39) \text{ (答)}$$

$$c_1 = 12, \quad c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = -324 \text{ と } \textcircled{3} \text{ より}$$

$$c_{4l-3} = 12 \cdot 81^{l-1} \quad (l = 1, 2, 3, \dots),$$

$$c_{4l-2} = c_{4l-1} = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \dots),$$

$$c_{4l} = -324 \cdot 81^{l-1} \quad (l = 1, 2, 3, \dots).$$

$m \geq 1$ に対して

$$S_{4m-1} = S_{4m} - c_{4m} = \frac{39}{10}(1 - 81^m) + 324 \cdot 81^{m-1} = \frac{39}{10} + \frac{1}{10} \cdot 81^m = u + \frac{1}{10}v^m.$$

$$S_{4m-2} = S_{4m-1} - c_{4m-1} = u + \frac{1}{10}v^m.$$

$$S_{4m-3} = S_{4m-2} - c_{4m-2} = u + \frac{1}{10}v^m.$$

よって

$$S_n = u + \frac{\boxed{1}}{\boxed{10}} v^m \quad (n = 4m-3, 4m-2, 4m-1). \quad \dots (40)(41)(42) \text{ (答)}$$

[2](つづき 3)

(3) 【別解】

i を虚数単位として $z_n = a_n + ib_n$ とおく.

$n = 2m - 1$ (奇数) のとき.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= a_{n+1} + ib_{n+1} \\ &= -\frac{6}{5}a_n - \frac{9}{10}b_n + i\left(-\frac{9}{10}a_n - \frac{6}{5}b_n\right) \\ &= \left(-\frac{6}{5} + \frac{9}{10}i\right)(a_n + ib_n) \\ &= mz_n \end{aligned}$$

ただし $m = -\frac{6}{5} + \frac{9}{10}i$ である.

$n = 2m$ (偶数) のとき.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= a_{n+1} + ib_{n+1} \\ &= -\frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}ib_n \\ &= -\frac{3}{2}(a_n - ib_n) \\ &= -\frac{3}{2}\overline{z_n} \end{aligned}$$

以上より, n を奇数として

$$\begin{aligned} z_{n+2} &= -\frac{3}{2}\overline{z_{n+1}} = -\frac{3}{2}\overline{mz_n} \\ z_{n+4} &= -\frac{3}{2}\overline{mz_{n+2}} = \frac{9}{4}|m|^2 z_n \end{aligned}$$

ここで $|m|^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{9}{4}$ より

$$z_{n+4} = \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} z_n = \frac{81}{16} z_n$$

同様に, 上式は n が偶数のときも成立する.

よって, 自然数 n に対して

$$a_{n+4} + ib_{n+4} = \frac{81}{16}(a_n + ib_n)$$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は実数の数列であるから

$$a_{n+4} = \frac{81}{16}a_n, \quad b_{n+4} = \frac{81}{16}b_n$$

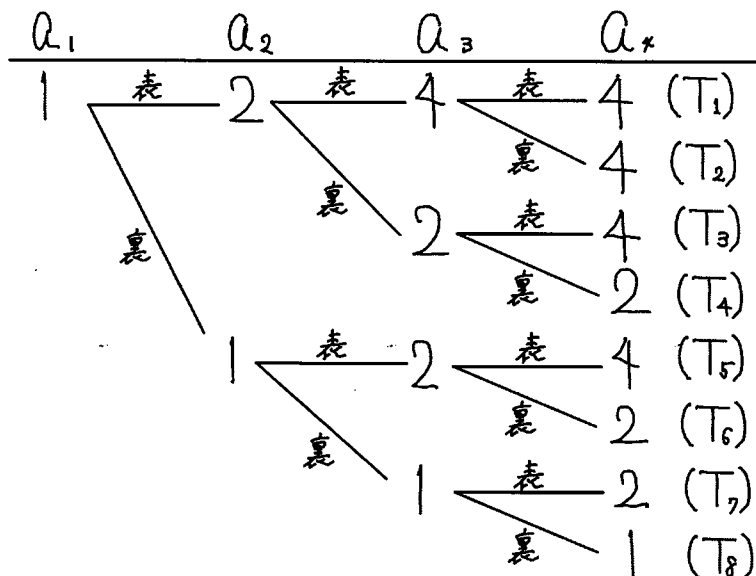
よって

$$\begin{aligned} c_{n+4} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+3} a_{n+4} b_{n+4} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+3} \left(\frac{81}{16}\right)^2 a_n b_n \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{81}{16}\right)^2 a_n b_n \\ &= \boxed{8 \mid 1} c_n \end{aligned}$$

... (27)(28)(答)

[3]

a_1, a_2, a_3, a_4 は次のようになる.



- (1) $a_3 = 2$ となるのは, (T₃), (T₄), (T₅), (T₆) の場合であるから, $a_3 = 2$ である確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \quad \dots (43)(44) \text{ (答)}$$

- $a_4 = 4$ となるのは, (T₁), (T₂), (T₃), (T₅) の場合であるから, $a_4 = 4$ である確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27} \quad \dots (45)(46)(47) \text{ (答)}$$

- (2) (a_1, a_2, a_3, a_4) の組と X は 1 対 1 に対応しており, (a_1, a_2, a_3, a_4) の組は

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 4, 4), (1, 2, 2, 4), (1, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$

の 7 個あるので, X の取りうる値は全部で 7 通りある. $\dots (48) \text{ (答)}$

- (3) X が 3 の倍数となるのは, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ が 3 の倍数となるときであるから, (T₃), (T₆) の場合である. したがって, X が 3 の倍数である確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \quad \dots (49)(50) \text{ (答)}$$

X が 3 の倍数かつ 4 の倍数でないのは, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ が 3 の倍数かつ $10a_3 + a_4$ が 4 の倍数でないときであるから, (T₆) の場合であり, この確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

したがって, X が 3 の倍数であるとき, 4 の倍数でない条件付き確率は

$$\frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3} \quad \dots (51)(52) \text{ (答)}$$

[3] (つづき 1)

(4) Y すなわち a_4 のとり得る値は 1, 2, 4.

$a_4 = 1$ となるのは, (T_8) の場合であるから, $a_4 = 1$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

$a_4 = 2$ となるのは, (T_4) , (T_6) , (T_7) の場合であるから, $a_4 = 2$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

$a_4 = 4$ となるのは, (T_1) , (T_2) , (T_3) , (T_5) の場合であるから, $a_4 = 4$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}.$$

したがって, Y の期待値は

$$1 \cdot \frac{1}{27} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{7}{27} = \frac{\boxed{20}}{\boxed{9}}. \quad \dots (53)(54)(55) \text{ (答)}$$

X の期待値を $E(X)$, a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) の期待値を $E(a_i)$ と書くことにする.

$$E(a_1) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$E(a_2) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$E(a_3) = 1 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{9},$$

$$E(a_4) = \frac{20}{9}.$$

これらを用いると

$$\begin{aligned} E(X) &= E(10^3 a_1 + 10^2 a_2 + 10 a_3 + a_4) \\ &= 10^3 E(a_1) + 10^2 E(a_2) + 10 E(a_3) + E(a_4) \\ &= 10^3 \cdot 1 + 10^2 \cdot \frac{4}{3} + 10 \cdot \frac{16}{9} + \frac{20}{9} \\ &= \frac{\boxed{3460}}{\boxed{3}}. \quad \dots (56) \sim (60) \text{ (答)} \end{aligned}$$

[補足]

(4) の X の期待値は, 一般に, a, b を定数, X_1, X_2 を確率変数とすると, $aX_1 + bX_2$ の期待値 $E(aX_1 + bX_2)$ において

$$E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2)$$

が成り立つことを利用して計算した.

[4]

(*) において、真数の条件より、 $x > 0$ … ①

このとき

$$\log_4 \left(\frac{1}{x^6} \right) = \frac{\log_2 \left(\frac{1}{x^6} \right)}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x^{-6}}{\log_2 4} = \frac{-6 \log_2 x}{2} = -3 \log_2 x$$

より (*) は

$$(\log_2 x)^2 - 2\sqrt{t} \log_2 x + 4 = 0.$$

$X = \log_2 x$ とおくと

$$X^2 - 2\sqrt{t}X + 4 = 0. \quad \dots (*)'$$

(1) $t = \frac{25}{4}$ のとき, (*)' より

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

$$(X - 1)(X - 4) = 0$$

$$X = 1, 4$$

$X = \log_2 x$ より

$$\log_2 x = 1, 4$$

よって

$$x = 2, 16 \quad (\text{これは ① を満たす}).$$

… (答)

(2) (*) が α, β を解に持つことから, (*)' は $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ を解に持つ.

$\sqrt{2} < \alpha < \beta$ のとき, $\frac{1}{2} < \log_2 \alpha < \log_2 \beta$ であるから,

(*)' は $X > \frac{1}{2}$ の範囲に異なる 2 つの解を持つ. … ②

$$f(X) = X^2 - 2\sqrt{t}X + 4 \text{ とおく.}$$

$$f(X) = (X - \sqrt{t})^2 - t + 4.$$

XY 平面において, $Y = f(X)$ のグラフの頂点の座標は $(\sqrt{t}, -t + 4)$.

$$\text{また, } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4} - \sqrt{t}.$$

② より, $Y = f(X)$ のグラフは, X 軸と $X > \frac{1}{2}$ の範囲に共有点を 2 つ持つことから

$$\begin{cases} f(\sqrt{t}) < 0, \\ \sqrt{t} > \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} -t + 4 < 0, \\ \sqrt{t} > \frac{1}{2}, \\ \frac{17}{4} - \sqrt{t} > 0. \end{cases}$$

$$\text{より, } \begin{cases} t > 4, \\ t > \frac{1}{4}, \\ t < \frac{289}{16}. \end{cases}$$

$$\text{すなわち, } 4 < t < \frac{289}{16}.$$

… (答)

[4] (つづき 1)

(3) $A = \log_2 \alpha$, $B = \log_2 \beta$ とおく. $(*)'$ において, 解と係数の関係により

$$\begin{cases} A + B = 2\sqrt{t}, \\ AB = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4} \left\{ (\log_{\alpha} \beta + \log_{\alpha} \beta) - 14 \right\}^2 \left\{ \log_2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B} - 14 \right)^2 (B - A)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{(A + B)^2 - 2AB}{AB} - 14 \right\}^2 \left\{ (A + B)^2 - 4AB \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4t - 8}{4} - 14 \right)^2 (4t - 16) \\ &= (t - 16)^2 (t - 4). \end{aligned}$$

... (答)

(4) $g(t) = (t - 16)^2 (t - 4)$ とおく.

$$g(t) = t^3 - 36t^2 + 384t - 1024.$$

$$g'(t) = 3t^2 - 72t + 384$$

$$= 3(t - 8)(t - 16).$$

$4 < t < \frac{289}{16}$ における $g(t)$ の増減は次のようになる.

t	(4)	...	8	...	16	...	$\left(\frac{289}{16}\right)$
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	(0)	↗	256	↘	0	↗	

$g(20) = 256$ に注意すると

$$g\left(\frac{289}{16}\right) < g(20) = 256$$

であるから, これと増減表から, y のとり得る値の範囲は

$$0 \leq y \leq 256.$$

... (答)

[5]

(1) 条件より,

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OD}| = 1,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OD} \cdot \vec{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

また,

$$\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = -\vec{OA} + t\vec{OB},$$

$$\vec{AF} = \vec{OF} - \vec{OA} = -\vec{OA} + (1-t)\vec{OD}.$$

これより,

$$\begin{aligned} |\vec{AE}|^2 &= |-\vec{OA} + t\vec{OB}|^2 \\ &= |\vec{OA}|^2 - 2t\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t^2|\vec{OB}|^2 \\ &= t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

よって, $|\vec{AE}| > 0$ より,

$$|\vec{AE}| = \sqrt{t^2 - t + 1}.$$

... (答)

また,

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{AF} &= (-\vec{OA} + t\vec{OB}) \cdot \{-\vec{OA} + (1-t)\vec{OD}\} \\ &= |\vec{OA}|^2 - (1-t)\vec{OA} \cdot \vec{OD} - t\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t(1-t)\vec{OB} \cdot \vec{OD} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

... (答)

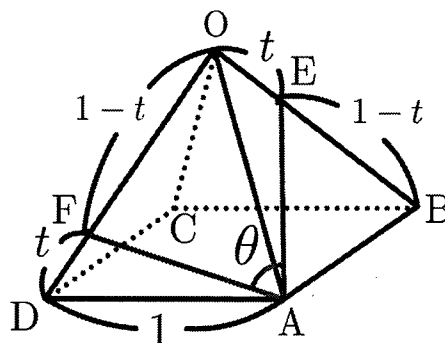
(2) $\triangle AOE \equiv \triangle ADF$ より, $AE = AF$ であるから,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AF}}{|\vec{AE}| |\vec{AF}|} \\ &= \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AF}}{|\vec{AE}|^2} \\ &= \frac{1}{2(t^2 - t + 1)} \\ &= \frac{1}{2\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}}. \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ のとき, $\frac{3}{4} \leq \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 1$ であるから, $\cos \theta$ のとり得る値の範囲は,

$$\frac{1}{2} < \cos \theta \leq \frac{2}{3}.$$

... (答)



[5] (つづき 1)

(3) $\cos \theta$ が最大となるときは, (2) より, $t = \frac{1}{2}$ である.

このとき, E, F はそれぞれ辺 OB, OD の中点である.

また, 四角形 ABCD は正方形であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OC} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}. \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

次に, G は平面 AEF 上にあるので, 実数 p, q を用いて,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AE} + q\overrightarrow{AF}$$

と表せる. これより,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + p(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) + q(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} + p\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= (1-p-q)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}p\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}q\overrightarrow{OD}. \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

また, G は直線 OC 上にあるので, 実数 r を用いて,

$$\overrightarrow{OG} = r\overrightarrow{OC}$$

と表せる. これと ① より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= r(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= -r\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OD}. \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ は 1 次独立であるから, ②, ③ より,

$$\begin{cases} 1-p-q = -r, \\ \frac{1}{2}p = r, \\ \frac{1}{2}q = r. \end{cases}$$

よって,

$$p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}.$$

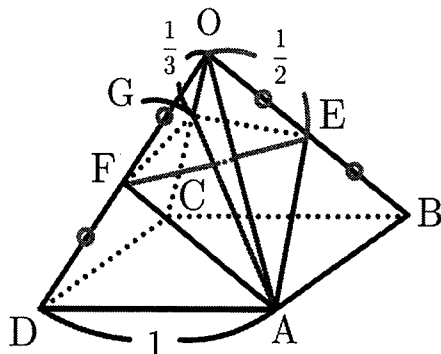
③ より,

$$\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}.$$

したがって,

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \gamma = \frac{1}{3}. \quad \dots (\text{答})$$

[5] (つづき 2)
(4)



O から四角形 ABCD に下ろした垂線の足を H とする.

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

四面体 OABD の体積を [OABD] などと表すと,

$$[OABD] = [OBCD] = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABD \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

よって,

$$\begin{aligned} V &= [OAEF] + [OEGF] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [OABD] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} [OBCD] \\ &= \frac{1}{3} [OABD] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{36}. \end{aligned}$$

... (答)

<別解>

四角錐 O-AEGF は平面 OAG において対称であり, 直線 $EF \perp$ 平面 OAG である.

(3) より, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ であり, $\angle AOG = \frac{\pi}{2}$ より,

$$(\triangle OAG \text{ の面積}) = \frac{1}{2} OA \cdot OG = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

また, $\triangle OEF$ は $\angle EOF = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形より,

$$EF = \sqrt{2}OE = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって,

$$V = \frac{1}{3} (\triangle OAG \text{ の面積}) \cdot EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

... (答)

[6]

$f(x) = x^3 + ax + b$ とし、方程式 $f(x) = 0$ の 3 実数解 s, t, u が

$$s < t < u, \quad u - t = 2(t - s)$$

を満たす。曲線 $C: y = f(x)$ とし、 $A(s, 0)$ における接線は ℓ である。

(1)

$$u - t = 2(t - s) \text{ より}$$

$$u = 3t - 2s$$

また $x^3 + ax + b = 0$ は x^2 の係数が 0 なので

$$s + t + u = 0$$

これに $u = 3t - 2s$ を代入すると

$$s + t + 3t - 2s = 0$$

$$s = 4t$$

したがって

$$u = 3t - 2(4t) = -5t$$

また、解と係数の関係より

$$\begin{cases} a = st + tu + us \\ b = -stu \end{cases}$$

ここで $s = 4t$, $u = -5t$ を代入して

$$\begin{cases} a = (4t)t + t(-5t) + (4t)(-5t) = -21t^2 \\ b = -(4t \cdot t \cdot (-5t)) = 20t^3 \end{cases}$$

以上より

$$s = 4t, \quad u = -5t, \quad a = -21t^2, \quad b = 20t^3 \quad \dots (\text{答})$$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 + a \text{ だから}$$

$$f'(s) = 3s^2 + a = 3(4t)^2 - 21t^2 = 27t^2$$

よって接線 ℓ の方程式は

$$y = 27t^2(x - s)$$

$$y = 27t^2(x - 4t)$$

C と ℓ の式から y を消去して

$$f(x) = 27t^2(x - 4t)$$

$$x^3 - 21t^2x + 20t^3 = 27t^2(x - 4t)$$

[6](つづき 1)

$$x^3 - 48t^2x + 128t^3 = 0$$

$$(x - 4t)^2(x + 8t) = 0$$

$$x = 4t, -8t$$

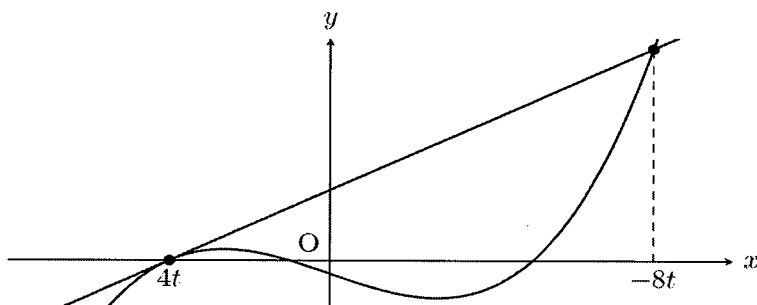
したがって B の x 座標は

$$-8t$$

…(答)

$g(x) = (x - 4t)^2(x + 8t)$ とおく.

$s = 4t, u = -8t, s < u$ より $t < 0$ である.



区間 $4t \leq x \leq -8t$ では $g(x) \leq 0$ に注意する.

$$\begin{aligned} S &= \int_{4t}^{-8t} \{f(x) - 27t^2(x - 4t)\} dx = \int_{4t}^{-8t} \{-g(x)\} dx = - \int_{4t}^{-8t} g(x) dx \\ &= - \int_{4t}^{-8t} (x - 4t)^2(x + 8t) dx \\ &= \frac{1}{12}(-8t - 4t)^4 \\ &= \frac{1}{12}(-12t)^4 \\ &= 1728t^4 \end{aligned}$$

…(答)

(3)

条件 $7S = -4a + 42b$ と (1), (2) より

$$7 \cdot 1728t^4 = -4(-21t^2) + 42(20t^3)$$

$$12096t^4 = 84t^2 + 840t^3$$

$t < 0$ より $84t^2$ で割って

$$144t^2 = 1 + 10t$$

$$(8t - 1)(18t + 1) = 0$$

これと $t < 0$ より

$$t = -\frac{1}{18}$$

…(答)