$\boxed{1}$

$P(s, t)$ とおく．

P は第1象限にある C 上の点より

$$\begin{cases} 0 < s < 1 \\ 0 < t < 1 \\ s^2 + t^2 = 1 \quad \cdots ① \end{cases}$$

点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$\ell : sx + ty = 1$

放物線 $K : y = 2 - x^2$ より y を消去して

$sx + t(2 - x^2) = 1$

$tx^2 - sx + 1 - 2t = 0 \quad \cdots ②$

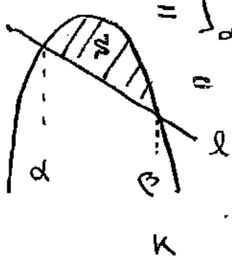
$t \neq 0$ に注意し，判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &= s^2 - 4t(1 - 2t) \\ &= (1 - t^2) - 4t(1 - 2t) \quad (①より) \\ &= 7t^2 - 4t + 1 \quad \cdots ③ \\ &= 7\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに，ℓ と K は異なる2点で交わる

② は異なる2つの実数解 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$

をもち，
$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{2 - x^2 - \left(-\frac{s}{t}x + \frac{1}{t}\right)\right\} dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{-(x - \alpha)(x - \beta)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$



S が最小となるのは

$\beta - \alpha$ が最小になる

ときである．

$\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ は ② の解なので

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{s + \sqrt{D}}{2t} - \frac{s - \sqrt{D}}{2t} \quad (t > 0 より) \\ &= \frac{\sqrt{D}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{7t^2 - 4t + 1}}{t} \quad (③より) \\ &= \sqrt{7 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} \quad (t > 0 より) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 2\right)^2 + 3} \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ すなわち $\frac{1}{t} > 1$ より

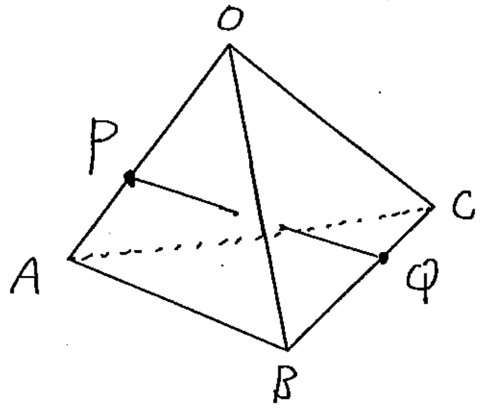
$\frac{1}{t} = 2$ すなわち $t = \frac{1}{2}$ のとき

$\beta - \alpha$ は最小値 $\sqrt{3}$ をとる．

したがって，④ より

S の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ …(答)

$\boxed{2}$　$r>0$.



辺BC上に点Qをとる.
点Pが辺OA上を，点Qが辺BC上をそれぞれ独立に動いたときの線分PQの長さの最大値をM，最小値をmとすると，求めるrの値の範囲は，

$0<r<m, \quad M<r \quad \cdots (*)$

である.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと,

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a} \quad (0\leqq s\leqq 1)$

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c} \quad (0\leqq t\leqq 1)$

と表されるので,

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$
$$=-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}.$$

よって,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}|^2$$
$$=s^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2$$
$$-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)t\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$-2st\vec{c}\cdot\vec{a}.$$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$,
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
を用いると,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=s^2+(1-t)^2+t^2$$
$$-s(1-t)+(1-t)t-st$$
$$=s^2-s+t^2-t+1$$
$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

s, tは独立に $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くことに注意すると,
$0\leqq\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4}, 0\leqq\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4}$
より,
$$\frac{1}{2}\leqq|\overrightarrow{PQ}|^2\leqq 1.$$

したがって,

$$M=1, \quad m=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

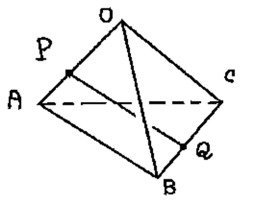
(*)より，求めるrの値の範囲は,

$0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1<r. \cdots$（答）

2 (別解)

$r>0$.

Pを固定する. 辺BCの中点をMとし, PB, PMの長さをそれぞれ, L_P, l_P とおく.

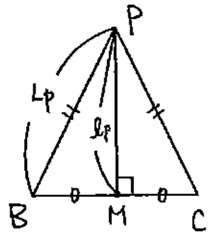


$\triangle OPB \equiv \triangle OPC$ より

$\triangle PBC$ は $PB=PC$ の二等辺三角形であるから, 辺BC上の点Qに対して,

$$l_P \leqq PQ \leqq L_P \quad \cdots ①$$

が成り立つ.



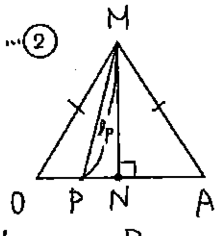
次に点Pを辺OA上で動かす.

$\triangle COM \equiv \triangle CAM$ より

$\triangle MOA$ は $MO=MA$ の二等辺三角形であるから, 辺OAの中点をNとすると,

$$MN \leqq l_P \quad \cdots ②$$

が成り立つ.

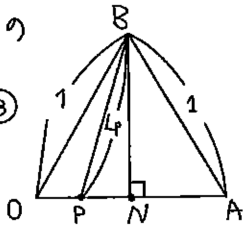


$\triangle OAB$ は1辺の長さが1の正三角形であるから,

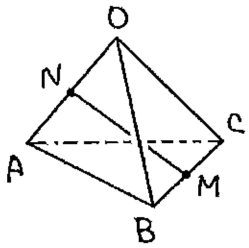
$$L_P \leqq 1 \quad \cdots ③$$

($OA=OB=1$ より)

が成り立つ.



$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{BN^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{OB^2 - ON^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



と①, ②, ③より, 点Pが辺OA上, 点Qが辺BC上を動くとき, PQのとりうる値の範囲は,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq PQ \leqq 1.$$

ここで, Pを中心とする半径 r の球面が辺BCと共有点をもつ条件は,

$$PQ = r$$

となる辺BC上の点Qが存在することであるから, 辺OA上のある点Pで,

点Pを中心とする半径 r の球面が辺BCと共有点をもつような r の範囲は,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq r \leqq 1.$$

よって, 点Pが辺OA上のどこにあっても, 点Pを中心とする半径 r の球面が辺BCと共有点をもたないような r の範囲は, $r>0$ を考慮して,

$$0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1 < r \quad \cdots (答)$$

3

合同式は，すべて3を法とする．

pは3より大きい素数なので，

$p\equiv 1$ または $p\equiv 2$．

(1) Nは$2p$以上の整数である．

(ア) $N\equiv 0$ のとき

$\frac{N}{3}$は0以上の整数であり，

$$N=3\cdot\frac{N}{3}+p\cdot 0.$$

(イ) $N\equiv 1$ のとき

$p\equiv 1$であれば，$\frac{N-p}{3}$は0以上の整数であり，

$$N=3\cdot\frac{N-p}{3}+p\cdot 1.$$

$p\equiv 2$であれば，$2p\equiv 1$より$\frac{N-2p}{3}$は0以上の整数であり，

$$N=3\cdot\frac{N-2p}{3}+p\cdot 2.$$

(ウ) $N\equiv 2$ のとき

$p\equiv 1$であれば，$\frac{N-2p}{3}$は0以上の整数であり，

$$N=3\cdot\frac{N-2p}{3}+p\cdot 2.$$

$p\equiv 2$であれば，$\frac{N-p}{3}$は0以上の整数であり，

$$N=3\cdot\frac{N-p}{3}+p\cdot 1.$$

以上より，$2p$以上の整数Nは，0以上の整数m, kを用いて

$$N=3m+pk$$

と表すことができる．（証明終り）

(2) (1)より，$N\leqq 2p-1$として個数を求めればよい．

(i) $N\leqq p-1$のとき

$k=0$として考えればよく，表すことができないNは，3の倍数でないものである．

$p\equiv 1$であれば，$p-1\equiv 0$より，3の倍数でないNは，

$|1,2|4,5|\cdots|p-3,p-2|$ の $\frac{2}{3}(p-1)$個

$p\equiv 2$であれば，$p-1\equiv 1$より，3の倍数でないNは，

$|1,2|4,5|\cdots|p-4,p-3|p-1$ であり，

$$\frac{2}{3}(p-2)+1=\frac{2}{3}p-\frac{1}{3}\ (\text{個}).$$

(ii) $p\leqq N\leqq 2p-1$のとき

$k=0,1$として考えればよく，いずれでも表せないNは，N, $N-p$がいずれも3の倍数でないNである．

$p\equiv 1$であれば，$N\equiv 2$であるものであり，$p+1, p+4, \cdots, 2p-3$ の $\frac{1}{3}(p-1)$個．

$p\equiv 2$であれば，$N\equiv 1$であるものであり，$p+2, p+5, \cdots, 2p-3$ の $\frac{1}{3}(p-2)$個．

(i), (ii)を合わせて，

$$\frac{2}{3}(p-1)+\frac{1}{3}(p-1)=\frac{2}{3}p-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(p-2)$$

$=p-1$ より，求める個数は

$p-1$ 個　…(答)

4

(1) $[\log_3 K] = l$

となるようなKの範囲は，

$$3^l \leqq K \leqq 3^{l+1} - 1$$

であるから，

$$[\log_3 K] = \begin{cases} 0 & (1 \leqq K \leqq 2) \\ 1 & (3 \leqq K \leqq 8) \\ 2 & (9 \leqq K \leqq 26) \end{cases}$$

よって，

$$a_{26} = \sum_{K=1}^{26} [\log_3 K]$$

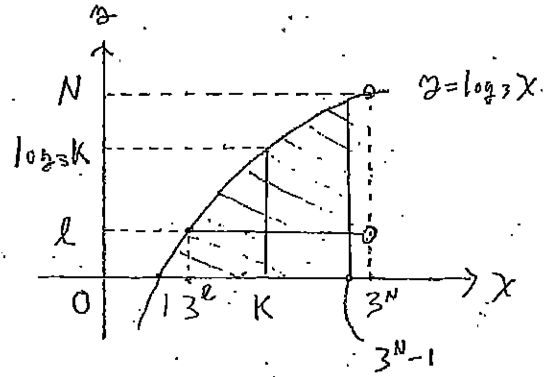
$$= 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 18 \cdot 2$$

$$= 42. \quad \cdots（答）$$

(2) $1 \leqq x \leqq 3^N - 1$,

$0 < y \leqq \log_3 x$

で表される領域を考える．



直線 $x = K$ $(K = 3, \cdots, 3^N - 1)$ 上で，この領域に含まれる格子点（x，y 座標がともに整数である点）は，

$$(K, 1), (K, 2), \cdots, (K, [\log_3 K])$$

であり，$[\log_3 K]$ 個ある．

$K = 1, 2$ のとき，$[\log_3 K] = 0$ であることに注意すると，

$$a_N = \sum_{K=1}^{3^N - 1} [\log_3 K]$$

は，この領域内の格子点の総数である．

$N \geqq 2$ のとき，直線 $y = l$ $(l = 1, 2, \cdots, N-1)$ 上で，この領域に含まれる格子点は，

$$(3^l, l), (3^l + 1, l), \cdots, (3^N - 1, l)$$

であり，$(3^N - 3^l)$ 個ある．

よって，

$$a_N = \sum_{l=1}^{N-1} (3^N - 3^l)$$

$$= (N-1) \cdot 3^N - \frac{3(3^{N-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= (N-1) \cdot 3^N - \frac{1}{2} \cdot 3^N + \frac{3}{2}$$

$$= \left(N - \frac{3}{2}\right) \cdot 3^N + \frac{3}{2}.$$

4

（これは$N=1$のときも成立する.）

以上より,

$a_m = \left(N - \frac{3}{2}\right) \cdot 3^N + \frac{3}{2}$.

…（答）

（補足）

（2）において, $N=3$とすると,

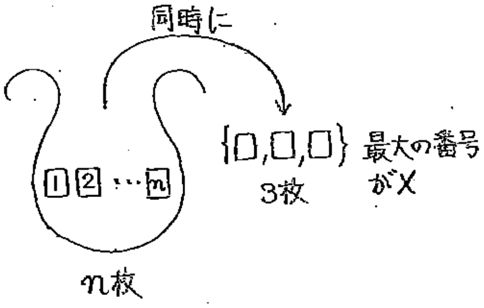
$m = 3^3 - 1 = 26$.

$a_{26} = \left(3 - \frac{3}{2}\right) \cdot 3^3 + \frac{3}{2}$

$= 42$.（1）の答）

$\boxed{5}$

$n \geqq 3$.



取り出し方は ${}_nC_3$ 通りであり，これらは同様に確からしい．

$3 \leqq k \leqq n$.

$X=k$ となるのは，取り出した3枚が

$$\{\underbrace{\square,\square}_{\boxed{1}\sim\boxed{k-1}\text{のうちの2枚}},\boxed{k}\}$$

となる場合で，${}_{k-1}C_2$ 通りある．

よって，

$$P(X=k)=\frac{{}_{k-1}C_2}{{}_nC_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{2\,{}_nC_3}.$$

Xの期待値は

$$E(X)=\sum_{k=3}^{n}kP(X=k)$$

$$=\frac{1}{2\,{}_nC_3}\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)$$

$$=\frac{1}{2\,{}_nC_3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{4}\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}$$

$$=\frac{1}{8\,{}_nC_3}\{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}-3\cdot2\cdot1\cdot0+\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2}-\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}+\cdots+(n+1)n(n-1)(n-2)-\cancel{n(n-1)(n-2)(n-3)}\}$$

$$=\frac{1}{8\,{}_nC_3}\cdot(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$=\frac{3(n+1)}{4}.$$ ---(答)