$\boxed{1}$

$y=f(x)$ と $y=k$ から y を消去して,

$$\frac{1}{x^2\left(\log\frac{a}{x}\right)^2}=k$$

このとき, $k>0$ となり,

$$x^2(\log a-\log x)^2=\frac{1}{k}$$

$g(x)=x^2(\log a-\log x)^2$ とおき, $y=g(x)$ と $y=\frac{1}{k}$ のグラフの共有点がちょうど2個存在するような条件を考える。

$$g'(x)=2x(\log a-\log x)^2+x^2\cdot 2(\log a-\log x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$=2x\log\frac{a}{x}\left(\log\frac{a}{x}-1\right)$$

ここで, $0<x<1$, $a>1$ より,

$$2x\log\frac{a}{x}>0$$

であり,

$$\log\frac{a}{x}-1=0 \iff x=\frac{a}{e}$$

(i) $a\geqq e$ のとき,

$\frac{a}{e}\geqq 1$ より, $0<x<1$ において,

$$g'(x)>0$$

であるから,

$g(x)$ は単調増加

したがって, $y=g(x)$ と $y=\frac{1}{k}$ のグラフの共有点が2個となることはなく不適

(ii) $1<a<e$ のとき,

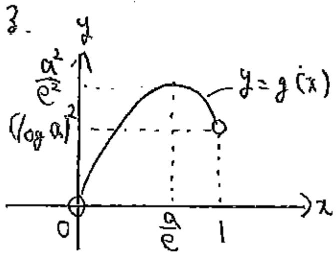
$0<\frac{a}{e}<1$ より, $0<x<1$ における $g(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{e}$	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{e^2}$	$\searrow$	$((\log a)^2)$

また,

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}(x\log a-x\log x)^2$$
$$=0$$

したがって, $y=g(x)$ のグラフは次のようになる。



以上より, 満たすべき条件は,

$$(\log a)^2<\frac{1}{k}<\frac{a^2}{e^2}$$

$k>0$ より,

$$\frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}$$

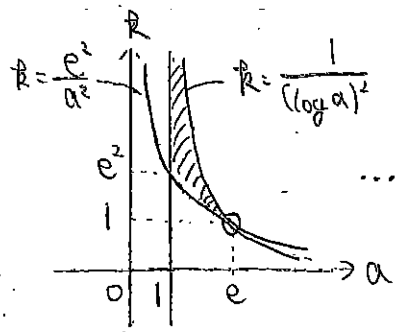
よって, (i), (ii) より, a, k の満たす条件は,

$$1<a<e \text{ かつ } \frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}\quad\cdots①$$

であり, $1<a<e$ において,

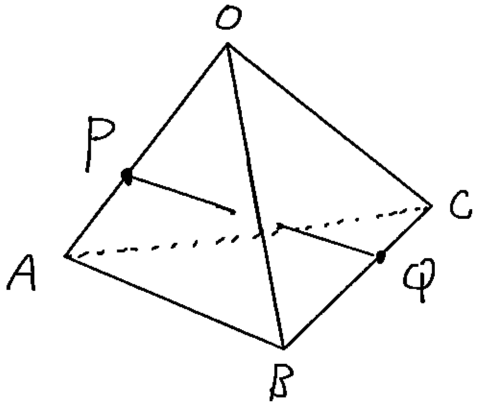
$$k=\frac{e^2}{a^2},\quad k=\frac{1}{(\log a)^2}$$

はともに単調減少であることより, ①を図示すると, 次図の斜線部(境界を含まない)



…(答)

$\boxed{2}$ $r>0$.



辺BC上に点Qをとる.

点Pが辺OA上を，点Qが辺BC上をそれぞれ独立に動いたときの線分PQの長さの最大値をM，最小値をmとすると，求めるrの値の範囲は，

$$0<r<m, \quad M<r \quad \cdots (*)$$

である.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a} \quad (0\leqq s\leqq 1)$$

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c} \quad (0\leqq t\leqq 1)$$

と表されるので，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}.$$

よって，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}|^2$$

$$=s^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2$$

$$-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)t\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$-2st\vec{c}\cdot\vec{a}.$$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

を用いると，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=s^2+(1-t)^2+t^2$$

$$-s(1-t)+(1-t)t-st$$

$$=s^2-s+t^2-t+1$$

$$=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

s, t は独立に $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くことに注意すると，

$$0\leqq\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4},\ 0\leqq\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4}$$

より，

$$\frac{1}{2}\leqq|\overrightarrow{PQ}|^2\leqq 1.$$

したがって，

$$M=1, \quad m=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

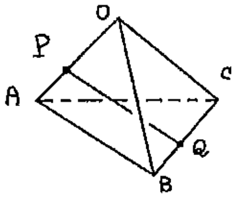
(*)より，求めるrの値の範囲は，

$$0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1<r. \cdots \text{(答)}$$

2 (別解)

$r>0$.

Pを固定する. 辺BCの中点をMとし, PB, PMの長さをそれぞれ, L_p, l_p とおく.



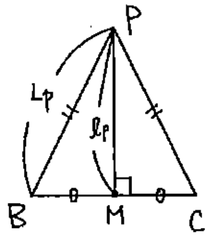
△OPB≡△OPCより

△PBCはPB=PCの二等辺三角形

であるから, 辺BC上の点Qに対して,

$$l_p \leqq PQ \leqq L_p \quad \cdots ①$$

が成り立つ.



次に点Pを辺OA上で動かす.

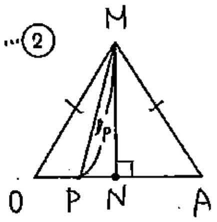
△COM≡△CAMより

△MOAはMO=MAの二等辺三角形

であるから, 辺OAの中点をNとすると,

$$MN \leqq l_p \quad \cdots ②$$

が成り立つ.

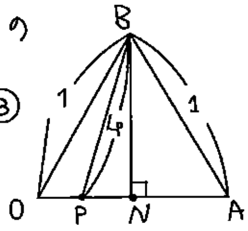


△OABは1辺の長さが1の正三角形であるから,

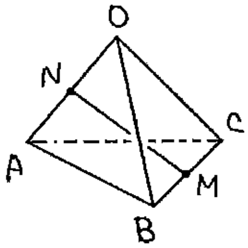
$$L_p \leqq 1 \quad \cdots ③$$

(OA=OB=1より)

が成り立つ.



$$MN=\sqrt{BN^2-BM^2}$$
$$=\sqrt{OB^2-ON^2-BM^2}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



と①, ②, ③より, 点Pが辺OA上, 点Qが辺BC上を動くとき, PQのとりうる値の範囲は,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq PQ \leqq 1.$$

ここで, Pを中心とする半径rの球面が辺BCと共有点をもつ条件は,

$$PQ=r$$

となる辺BC上の点Qが存在することであるから, 辺OA上のある点Pで,

点Pを中心とする半径rの球面が辺BCと共有点をもつようなrの範囲は,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq r \leqq 1.$$

よって, 点Pが辺OA上のどこにあっても, 点Pを中心とする半径rの球面が辺BCと共有点をもたないようなrの範囲は, $r>0$を考慮して,

$$0<r<\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1<r \quad \cdots (答)$$

3

$$f_n(x)=(x+1)^{2^{n+1}}-(x^2+1)^{2^n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

とおく。

$(x+1)^{2^{n+1}}$ の1次の項は ${}_{2^{n+1}}C_1x$。
$(x^2+1)^{2^n}$ に1次の項はない。

よって，$f_n(x)$ の1次の項の係数は

$${}_{2^{n+1}}C_1=2^{n+1}.$$

したがって，$f_n(x)$ のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m に対して $m\leqq n+1$ が成り立つ。

次に

「$f_n(x)$ のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れる」…(＊)

ことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$f_1(x)=(x+1)^4-(x^2+1)^2$$
$$=4x^3+4x^2+4x$$
$$=2^2x^3+2^2x^2+2^2x$$

であるから，(＊)は $n=1$ で成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

(＊)の成立，すなわち $f_k(x)$ のすべての係数が 2^{k+1} で割り切れると仮定する。

このとき

$$f_{k+1}(x)=(x+1)^{2^{k+2}}-(x^2+1)^{2^{k+1}}$$
$$=\left\{(x+1)^{2^{k+1}}\right\}^2-\left\{(x^2+1)^{2^k}\right\}^2$$
$$=\left\{(x+1)^{2^{k+1}}+(x^2+1)^{2^k}\right\}f_k(x)$$

および

$$(x+1)^{2^{k+1}}+(x^2+1)^{2^k}$$
$$=\left\{(x+1)^2\right\}^{2^k}+(x^2+1)^{2^k}$$
$$=\left\{(x^2+1)+2x\right\}^{2^k}+(x^2+1)^{2^k}$$
$$=2(x^2+1)^{2^k}+\sum_{i=1}^{2^k}{}_{2^k}C_i(x^2+1)^{2^k-i}(2x)^i$$
$$=2\left\{(x^2+1)^{2^k}+\sum_{i=1}^{2^k}{}_{2^k}C_i(x^2+1)^{2^k-i}2^{i-1}x^i\right\}$$

より，$f_{k+1}(x)$ のすべての係数は

$$2\times2^{k+1}=2^{(k+1)+1}$$

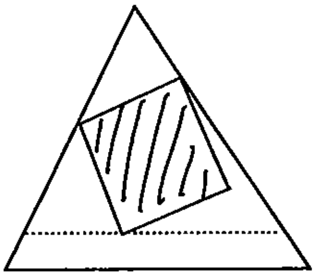
で割り切れ，(＊)は $n=k+1$ でも成り立つ。

(i)，(ii)より，$f_n(x)$ のすべての係数は 2^{n+1} で割り切れる。

以上のことより，$f_n(x)$ のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは $n+1$ である。（証明終り）

$\boxed{4}$

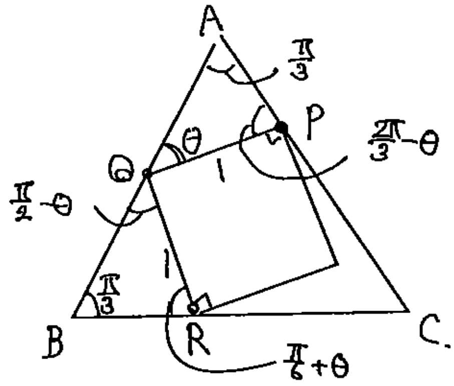
1辺の長さが1の正方形を周または内部に含む正三角形の1辺の長さの最小値を求める。



上図のように正三角形のうち、その辺上に正方形の頂点が存在しないものがあれば、正方形を含む、より小さな正三角形が作れる。よって、このような正三角形が存在するならば、その各辺それぞれに正方形の頂点が存在する。その3点をP, Q, Rとすると、P, Q, Rが正三角形の頂点と一致することはない。

P, Q, Rは正方形の4つの頂点から3点を選んだものであるから、$\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$のうち1つは$\frac{\pi}{2}$となる。

$\angle PQR=\frac{\pi}{2}$とする。



上図のように正三角形ABCがあって辺AC, AB, BC上にP, Q, Rがあるとしても一般性を失わない。

$\angle AQP=\theta$とすると、$\angle APQ$, $\angle QRB$は$\frac{\pi}{2}$以下であるから、

$$\frac{2\pi}{3}-\theta\leqq\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{6}+\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

である。三角形APQ, BQRに正弦定理を用いて

$$AQ=\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)$$

$$BQ=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

よって和と積の公式より

$$AQ+BQ=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{5\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

であるから①より

$$-\frac{\pi}{12}\leqq\frac{\pi}{4}-\theta\leqq\frac{\pi}{12}$$

$\boxed{4}$

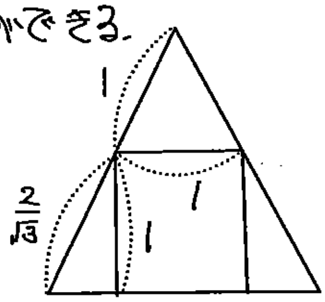
なので

$$AQ+BQ \geqq \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

よって，正方形を含む正三角形の1辺の長さは $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$ 以上であり，1辺の長さがちょうど $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，下図のように1辺の長さが1の正方形を周または内部に含むことができる．



以上より，求める最小値は

$1+\frac{2}{\sqrt{3}}$ ………（答）

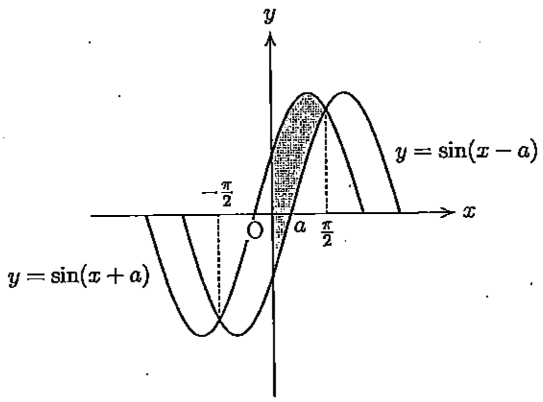
$\boxed{5}$

$y=\sin(x+a)$ と $y=\sin(x-a)$ のグラフで囲まれる図形は原点に関して対称である．

したがって，D_a は原点に関して対称であるから，まず D_a の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分について考える．

求める体積を V とする．

(i) $0 < a \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき．



$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，

$$|\sin(x+a)|^2 - |\sin(x-a)|^2$$
$$= 4\sin x\cos x\sin a\cos a \geqq 0$$

より，

$$|\sin(x+a)| \geqq |\sin(x-a)|.$$

よって，

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2(x+a)\,dx - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2(x-a)\,dx$$

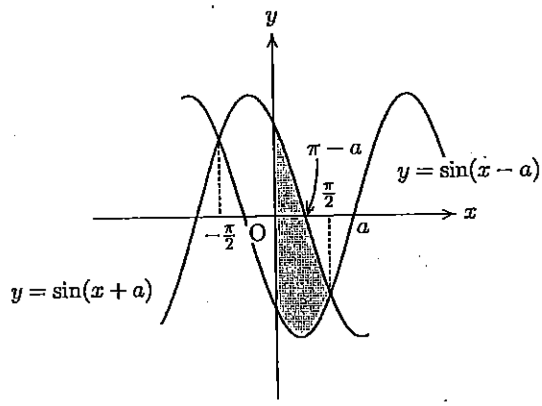
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x+2a)}{2}\,dx - \pi\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x-2a)}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin(2x+2a)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin(2x-2a)}{2}\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 2a}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - a - \frac{\sin 2a}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(a + \frac{3}{2}\sin 2a\right).$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leqq a < \pi$ のとき．



$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，

$$|\sin(x-a)|^2 - |\sin(x+a)|^2$$
$$= -4\sin x\cos x\sin a\cos a \geqq 0$$

より，

$$|\sin(x-a)| \geqq |\sin(x+a)|.$$

5

よって，

$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2(x-a)\,dx-\int_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2(x+a)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2x-2a)}{2}\,dx-\pi\int_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2x+2a)}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin(2x-2a)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin(2x+2a)}{2}\right]_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2a}{2}-\frac{\sin 2a}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\pi+a+\frac{\sin 2a}{2}\right)$$

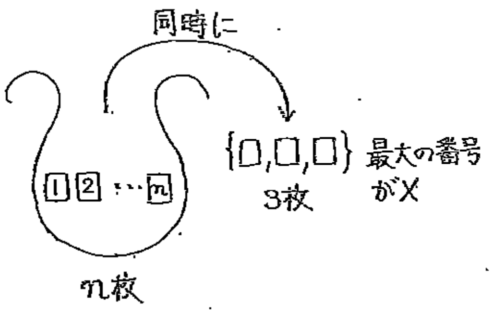
$$=\frac{\pi}{2}\left(\pi-a-\frac{3}{2}\sin 2a\right).$$

(i), (ii) より，

$$\left.\begin{aligned}&0<a\leqq\frac{\pi}{2}\text{ のとき}\\&\qquad V=\pi\left(a+\frac{3}{2}\sin 2a\right)\\&\frac{\pi}{2}\leqq a<\pi\text{ のとき}\\&\qquad V=\pi\left(\pi-a-\frac{3}{2}\sin 2a\right)\end{aligned}\right\}\cdots(\text{答})$$

$\boxed{6}$

$n \geqq 3$.



取り出し方は ${}_nC_3$ 通りであり，これらは同様に確からしい．

$3 \leqq k \leqq n$.

$X=k$ となるのは，取り出した3枚が

$$\{\underbrace{\square,\square}_{\boxed{1}\sim\boxed{k-1}\text{のうちの2枚}},\boxed{k}\}$$

となる場合で，${}_{k-1}C_2$ 通りある．

よって，

$$P(X=k)=\frac{{}_{k-1}C_2}{{}_nC_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{2\,{}_nC_3}.$$

X の期待値は

$$E(X)=\sum_{k=3}^{n} kP(X=k)$$

$$=\frac{1}{2\,{}_nC_3}\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

$$=\frac{1}{2\,{}_nC_3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{4}\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}$$

$$=\frac{1}{8\,{}_nC_3}\{4\cdot3\cdot2\cdot1-3\cdot2\cdot1\cdot0+5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2\cdot1+\cdots+(n+1)n(n-1)(n-2)-n(n-1)(n-2)(n-3)\}$$

$$=\frac{1}{8\,{}_nC_3}\cdot(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$=\frac{3(n+1)}{4}.\qquad\cdots(\text{答})$$