1

$$\begin{cases} |x^2-7x+1|=y^2 \\ y>0 \end{cases}$$

$|x^2-7x+1|=y^2$ において，$y^2>0$ より，

$$x^2-7x+1=y^2 \quad \text{または} \quad x^2-7x+1=-y^2$$

（ア）　$x^2-7x+1=y^2$ のとき

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{45}{4}=y^2$$
$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-y^2=\frac{45}{4}$$
$$\left(x-\frac{7}{2}+y\right)\left(x-\frac{7}{2}-y\right)=\frac{45}{4}$$
$$(2x+2y-7)(2x-2y-7)=45$$

$y>0$ より，$2x+2y-7>2x-2y-7$ であることに注意すると，以下のようになる．

$2x+2y-7$	45	15	9	-1	-3	-5
$2x-2y-7$	1	3	5	-45	-15	-9

よって，

$$(x,y)=(15,11),(8,3),(7,1),(-8,11),(-1,3),(0,1)$$

（イ）　$x^2-7x+1=-y^2$ のとき

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{45}{4}$$
$$(2x-7)^2+4y^2=45 \qquad \cdots ①$$

$(2x-7)^2 \geqq 0$ より，$4y^2 \leqq 45$ であることが必要で，

$$y=1,2,3$$

①に代入して，以下のようになる．

y	1	2	3
$(2x-7)^2$	41	29	9

x が整数となるのは $y=3$ のときのみであり，

$$2x-7=\pm 3$$
$$x=5,2$$

以上 (ア), (イ) より，求める整数の組は，

$$\boldsymbol{(x,y)=(15,11),(8,3),(7,1),(-8,11),(-1,3),(0,1),(2,3),(5,3)} \qquad \cdots (\text{答})$$

$\boxed{2}$

　すべての正の整数 m に対して，

$$\begin{cases} a_{2m-1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{m-2}+1}{3}}, \\ a_{2m} = \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-1}-1}{3}} \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i)　$m=1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{-1}+1}{3}}, \\ a_2 &= \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^0-1}{3}} \end{aligned}$$

であるから $(*)$ は成り立つ．

(ii)　$m=k$ のとき，$(*)$ が成り立つとすると，

$$\begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{k-2}+1}{3}}, \\ a_{2k} = \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{k-1}-1}{3}} \end{cases}$$

　このとき，

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_{2k} \cdot {a_{2k-1}}^2 \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{k-1}-1}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{k-2}+1}{3}} \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{4^{k-1}-1}{3} + \frac{2(2 \cdot 4^{k-2}+1)}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{k-1}+1}{3}}, \\ a_{2k+2} &= a_{2k+1} \cdot {a_{2k}}^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{k-1}+1}{3}} \cdot \left(\sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{k-1}-1}{3}} \right)^2 \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{k-1}+1}{3} + \frac{2(4^{k-1}-1)}{3}} \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^k-1}{3}} \end{aligned}$$

となり，$(*)$ は $m=k+1$ でも成り立つ．

　(i)，(ii) より，すべての正の整数 m に対して，

$$\begin{cases} a_{2m-1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{m-2}+1}{3}}, \\ a_{2m} = \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-1}-1}{3}} \end{cases}$$

が成り立つ．

$\boxed{2}$ **（つづき１）**

このとき,

$$\begin{aligned} a_{14} &= \sqrt{5}\cdot 10^{\frac{4^6-1}{3}} \\ &= \sqrt{5}\cdot 10^{\frac{4096-1}{3}} \\ &= \sqrt{5}\cdot 10^{1365} \\ &< 10^{2026}, \\ a_{15} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 10^{\frac{2\cdot 4^6+1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 10^{\frac{2\cdot 4096+1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 10^{2731} \\ &> 10^{2026} \end{aligned}$$

であり，帰納的にすべての正の整数 n に対して $a_n > 1$ であるから，$a_{n+2} = a_{n+1}\cdot {a_n}^2$ より，

$$a_{n+2} > a_{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これと，$a_1 < a_2$ と合わせると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加であるから，

$$a_n \geqq 10^{2026}$$

となる最小の n の値は,

$$n = 15 \qquad \cdots\ (答)$$

(参考)

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2\cdot {a_1}^2 \\ &= \sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{5}, \\ a_4 &= a_3\cdot {a_2}^2 \\ &= 2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \sqrt{5}\cdot 10, \\ a_5 &= a_4\cdot {a_3}^2 \\ &= \sqrt{5}\cdot 10\cdot\left(2\sqrt{5}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{5}\cdot 10^2, \\ a_6 &= a_5\cdot {a_4}^2 \\ &= 2\sqrt{5}\cdot 10^2\cdot\left(10\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \sqrt{5}\cdot 10^5, \end{aligned}$$

2 (つづき2)

$$\begin{aligned} a_7 &= a_6 \cdot {a_5}^2 \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^5 \cdot \left(2\sqrt{5} \cdot 10^2\right)^2 \\ &= 2\sqrt{5} \cdot 10^{10}, \\ a_8 &= a_7 \cdot {a_6}^2 \\ &= 2\sqrt{5} \cdot 10^{10} \cdot \left(\sqrt{5} \cdot 10^5\right)^2 \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{21}, \\ a_9 &= a_8 \cdot {a_7}^2 \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{21} \cdot \left(2\sqrt{5} \cdot 10^{10}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{5} \cdot 10^{42} \end{aligned}$$

より，$m = 2,\ 3,\ 4$ に対して，

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \sqrt{5} \cdot 10^{0+1+4+4^2+\cdot+4^{m-2}} \\ &= \sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-1}-1}{3}} \end{aligned}$$

と推測でき，$a_{2m} = a_{2m-1} \cdot {a_{2m-2}}^2$ より，

$$\begin{aligned} a_{2m-1} &= \frac{a_{2m}}{{a_{2m-2}}^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-1}-1}{3}}}{\left(\sqrt{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-2}-1}{3}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{4^{m-1}-1}{3} - \frac{2(4^{m-2}-1)}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10^{\frac{2 \cdot 4^{m-2}+1}{3}} \end{aligned}$$

と推測できる．

$\boxed{2}$（つづき 3）

【別解】

$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{5}$ より $a_1>1,\ a_2>1$ であり，$a_{n+2}=a_{n+1}\cdot {a_n}^2$ より

$$a_n>1 \text{ かつ } a_{n+1}>1 \text{ ならば，} a_{n+2}>1$$

が成り立つので，数学的帰納法により，すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $a_n>1$ が成り立つ．

そこで，$a_{n+2}=a_{n+1}\cdot {a_n}^2$ の両辺の $\log_{10}$ をとると

$$\log_{10} a_{n+2}=\log_{10}(a_{n+1}\cdot {a_n}^2)$$
$$\log_{10} a_{n+2}=\log_{10} a_{n+1}+2\log_{10} a_n$$

となるから，$b_n=\log_{10} a_n$ とおけば

$$b_{n+2}=b_{n+1}+2b_n$$

と表せる．この式は

$$\begin{cases} b_{n+2}+b_{n+1}=2(b_{n+1}+b_n) \\ b_{n+2}-2b_{n+1}=-(b_{n+1}-2b_n) \end{cases}$$

のように 2 通りに変形できるので $\{b_{n+1}+b_n\}$ は公比 2 の，$\{b_{n+1}-2b_n\}$ は公比 -1 の等比数列である．

よって，

$$\begin{cases} b_{n+1}+b_n=(b_2+b_1)\cdot 2^{n-1} \\ b_{n+1}-2b_n=(b_2-2b_1)(-1)^{n-1} \end{cases}$$

であり，$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{5}$ より

$$b_1=\log_{10}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_{10} 2,$$
$$b_2=\log_{10}\sqrt{5}=\frac{1}{2}\log_{10} 5=\frac{1}{2}(\log_{10} 10-\log_{10} 2)=\frac{1}{2}(1-\log_{10} 2)$$

であるから，

$$\begin{cases} b_{n+1}+b_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1} \\ b_{n+1}-2b_n=\dfrac{1}{2}(1-3\log_{10} 2)(-1)^{n-1} \end{cases}$$

となる．この 2 式を辺々引いて 3 で割ると

$$b_n=\frac{1}{6}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{6}(1-3\log_{10} 2)(-1)^{n-1} \qquad \cdots ①$$

が得られる．

一方，条件 $a_n \geqq 10^{2026}$ は，両辺の $\log_{10}$ をとると

$$\log_{10} a_n \geqq \log_{10} 10^{2026}$$
$$b_n \geqq 2026 \qquad \cdots ②$$

と変形できるので，①が②を満たすような $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ の最小値を求めればよい．

$\boxed{2}$ （つづき 4）

まず，$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{5}$ より $a_2 > a_1$ であり，$a_{n+2} = a_{n+1} \cdot {a_n}^2$ および $a_n > 1$ より，すべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $a_{n+2} > a_{n+1}$ が成り立つので，

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

となる．この不等式の両辺の $\log_{10}$ をとると

$$\begin{gathered}\log_{10} a_1 < \log_{10} a_2 < \log_{10} a_3 < \cdots \\ b_1 < b_2 < b_3 < \cdots\end{gathered}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}b_{14} &= \frac{1}{6} \cdot 2^{13} - \frac{1}{6}(1 - 3\log_{10} 2)(-1)^{13} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 8192 + \frac{1}{6}(1 - 3\log_{10} 2) \\ &< \frac{1}{6} \cdot 8192 + \frac{1}{6} \qquad (3\log_{10} 2 > 0 \text{ より}) \\ &= 1365.5\end{aligned}$$

より $b_{14} < 2026$ であり，

$$\begin{aligned}b_{15} &= \frac{1}{6} \cdot 2^{14} - \frac{1}{6}(1 - 3\log_{10} 2)(-1)^{14} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 16384 - \frac{1}{6}(1 - 3\log_{10} 2) \\ &> \frac{1}{6} \cdot 16384 - \frac{1}{6} \qquad (3\log_{10} 2 > 0 \text{ より}) \\ &= 2730.5\end{aligned}$$

より $b_{15} \geqq 2026$ であるから，

$$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_{14} < 2026 \leqq b_{15}$$

となる．したがって，②を満たす最小の n は

$$n = 15 \qquad \cdots (\text{答})$$

である．

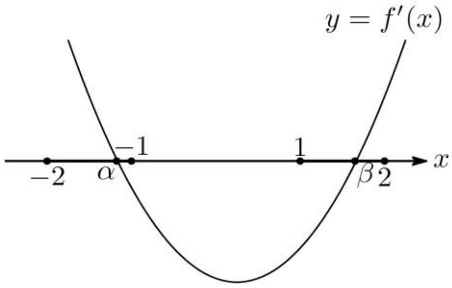
【別解終り】

3

条件 (i) より，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a，b，c は実数の定数) とおけ，

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

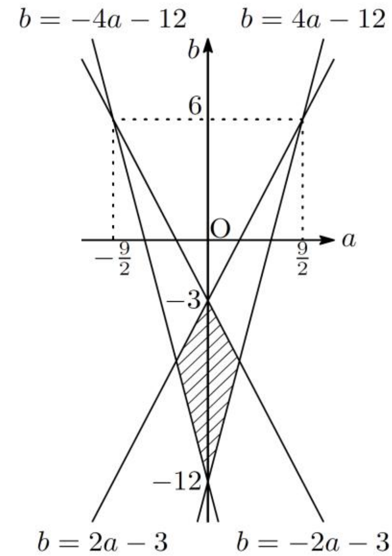
条件 (ii)，(iii) より，x の 2 次方程式 $f'(x)=0$ は，$-2\leqq x\leqq -1$，$1\leqq x\leqq 2$ の範囲にそれぞれ 1 個ずつ実数解をもつから，



$$\begin{cases} f'(-2)\geqq 0, \\ f'(-1)\leqq 0, \\ f'(1)\leqq 0, \\ f(2)\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12-4a+b\geqq 0, \\ 3-2a+b\leqq 0, \\ 3+2a+b\leqq 0, \\ 12+4a+b\geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b\geqq 4a-12, \\ b\leqq 2a-3, \\ b\leqq -2a-3, \\ b\geqq -4a-12 \end{cases}$$

これらで表される ab 平面上の領域を D とすると，D は次図斜線部分 (境界を含む) となる．



$\boxed{3}$ （つづき１）

このとき，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a, \\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3} \end{cases}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} k &= \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)-(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^3-\beta^3)+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b \\ &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+b \\ &= \left(-\frac{2}{3}a\right)^2-\frac{b}{3}+a\left(-\frac{2}{3}a\right)+b \\ &= -\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}b \end{aligned} \qquad \cdots ①$$

これより，

$$b=\frac{1}{3}a^2+\frac{3}{2}k \qquad \cdots ②$$

したがって，ab 平面上の放物線②と領域 D が共有点をもつような k のとり得る値の範囲を求めればよい．

放物線②は下に凸な放物線で，頂点の座標が $\left(0,\ \dfrac{3}{2}k\right)$ であることに注意すると，k が最大となるのは，②が $(0,\ -3)$ を通るときで，①より，最大値は，

$$k=-\frac{2}{9}\cdot 0^2+\frac{2}{3}\cdot(-3)=-2$$

また，k が最小となるのは，②が $(0,\ -12)$ を通るときで，①より，最小値は，

$$k=-\frac{2}{9}\cdot 0^2+\frac{2}{3}\cdot(-12)=-8$$

以上より，k のとり得る値の範囲は，

$$-8 \leqq k \leqq -2 \qquad \cdots (答)$$

$\boxed{3}$ （つづき２）

(参考)　条件 (i)，(ii) より，$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ とおけ，

$$\begin{aligned} f(\beta)-f(\alpha) &= \Big[f(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx \\ &= 3\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= 3\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

　したがって，

$$\begin{aligned} k &= \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \\ &= -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 \end{aligned}$$

であり，条件 (iii) より，$-2 \leqq \alpha \leqq -1$，$1 \leqq \beta \leqq 2$ であるから，$\beta-\alpha$ のとり得る値の範囲は，

$$2 \leqq \beta-\alpha \leqq 4$$

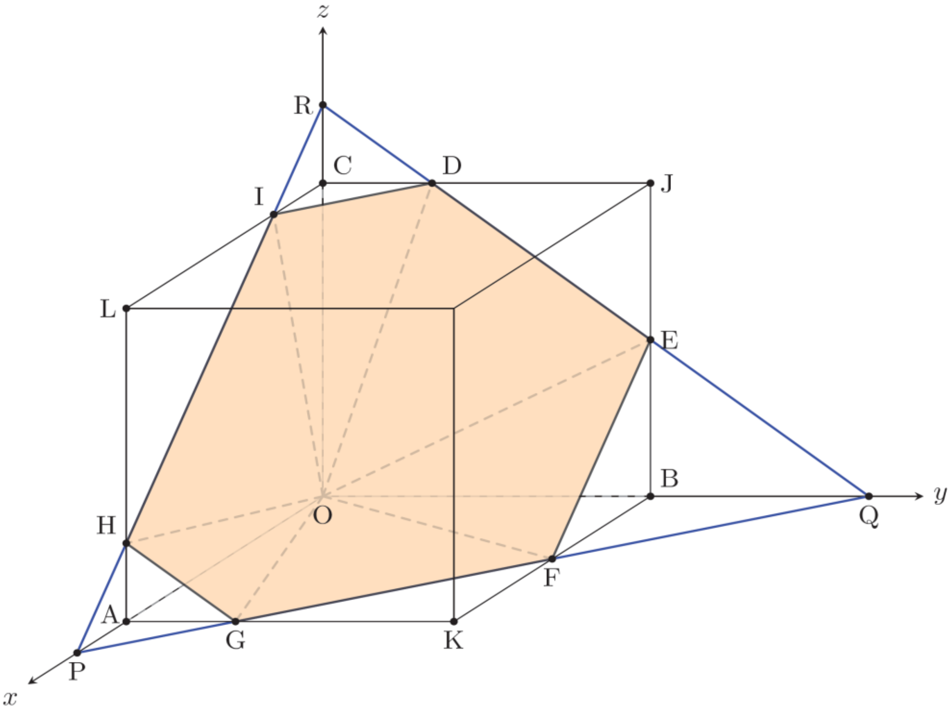
となることがわかる．

　よって，

$$-8 \leqq k \leqq -2$$

4

平面 α が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする．図形の相似に注目して各点の座標を順に求める．



まず，yz 平面上の断面に注目する．

$\triangle \mathrm{DJE} \backsim \triangle \mathrm{QBE}$ で，相似比は $\mathrm{JE}:\mathrm{BE}=3:3=1:1$ であるから，$\mathrm{QB}=\mathrm{DJ}=4$ となる．点 B の y 座標は 6 より $\mathrm{Q}(0,\ 10,\ 0)$ を得る．

次に，xy 平面上の断面に注目する．

$\triangle \mathrm{QBF} \backsim \triangle \mathrm{GKF}$ で，相似比は $\mathrm{BF}:\mathrm{KF}=3:3=1:1$ であるから，$\mathrm{GK}=\mathrm{QB}=4$ となる．点 K の y 座標は 6 より，$\mathrm{G}\,(6,\ 2,\ 0)$ を得る．さらに，$\triangle \mathrm{FKG} \backsim \triangle \mathrm{PAG}$ で，相似比は $\mathrm{KG}:\mathrm{AG}=4:2=2:1$ であるから，$\mathrm{PA}=\dfrac{1}{2}\mathrm{FK}=\dfrac{3}{2}$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{15}{2},\ 0,\ 0\right)$ を得る．

同様に考えていくと $\mathrm{R}\left(0,\ 0,\ \dfrac{15}{2}\right)$，$\mathrm{H}\left(6,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 6\right)$ を得る．

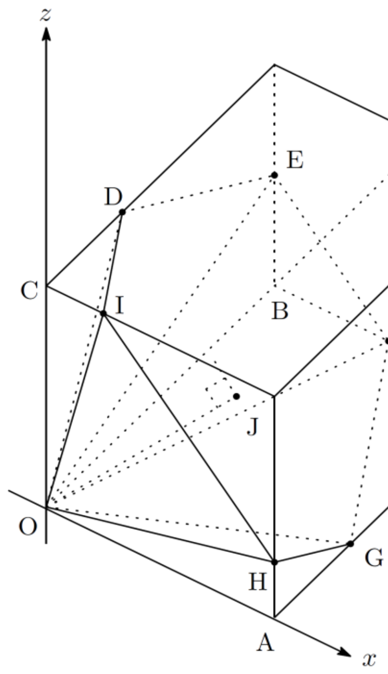
したがって，求める錐体は，六角形 DEFGHI を底面とし，O を頂点とする六角錐で，その体積を V，四面体 OPQR，OPGH，OQFE，ORDI の体積をそれぞれ V_0，V_1，V_2，V_3 とすると，

$$
\begin{aligned}
V &= V_0-(V_1+V_2+V_3)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OPQ}\cdot \mathrm{OR}-\left(\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OPG}\cdot\mathrm{AH}+\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OQF}\cdot\mathrm{BE}+\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ORD}\cdot\mathrm{CI}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{15}{2}\right)\cdot\frac{15}{2}-\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 2\right)\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3\right)\cdot 3+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 2\right)\cdot\frac{3}{2}\right\}\\
&= \frac{3\cdot 5^3}{4}-\left(\frac{15}{4}+15+\frac{15}{4}\right)\\
&= \frac{285}{4}
\end{aligned}
$$

$\cdots$(答)

$\boxed{4}$ （つづき 1）

【別解】



α による K の切り口のうち，D，E，F 以外の頂点を図のように G，H，I とする．平面 α 上の点は，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\ &= (1-s-t)(0,\ 2,\ 6)+s(0,\ 6,\ 3)+t(3,\ 6,\ 0)\\ &= (3t,\ 2+4s+4t,\ 6-3s-6t) \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

と表せるので，①において

- $x=6,\ z=0$ とすると，$s=-2,\ t=2,\ y=2$ となるので，G$(6,\ 2,\ 0)$
- $x=6,\ y=0$ とすると，$s=-\dfrac{5}{2},\ t=2,\ z=\dfrac{3}{2}$ となるので，H$\left(6,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$
- $y=0,\ z=6$ とすると，$s=-1,\ t=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{3}{2}$ となるので，I$\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 6\right)$

である．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(0,\ 6,\ 3)-(0,\ 2,\ 6)=(0,\ 4,\ -3),\\ \overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(3,\ 6,\ 0)-(0,\ 2,\ 6)=(3,\ 4,\ -6),\\ \overrightarrow{\mathrm{DG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(6,\ 2,\ 0)-(0,\ 2,\ 6)=(6,\ 0,\ -6),\\ \overrightarrow{\mathrm{DH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(6,\ 0,\ \frac{3}{2}\right)-(0,\ 2,\ 6)=\left(6,\ -2,\ -\frac{9}{2}\right),\\ \overrightarrow{\mathrm{DI}} &= \overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 6\right)-(0,\ 2,\ 6)=\left(\frac{3}{2},\ -2,\ 0\right)\end{aligned}$$

$\boxed{4}$（つづき 2）

となるので，三角形の面積公式より

$$\triangle\mathrm{DEF} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25\cdot 61 - 34^2} = \frac{3}{2}\sqrt{41}\,,$$
$$\triangle\mathrm{DFG} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{61\cdot 72 - 54^2} = 3\sqrt{41}\,,$$
$$\triangle\mathrm{DGH} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{DG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72\cdot\frac{241}{4} - 63^2} = \frac{3}{2}\sqrt{41}\,,$$
$$\triangle\mathrm{DHI} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DI}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DI}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{241}{4}\cdot\frac{25}{4} - 13^2} = \frac{9}{8}\sqrt{41}$$

であり，六角形 DEFGHI の面積を S とすると，

$$S = \triangle\mathrm{DEF} + \triangle\mathrm{DFG} + \triangle\mathrm{DGH} + \triangle\mathrm{DHI} = \frac{3}{2}\sqrt{41} + 3\sqrt{41} + \frac{3}{2}\sqrt{41} + \frac{9}{8}\sqrt{41} = \frac{57}{8}\sqrt{41} \qquad \cdots②$$

となる．

一方，原点 O から α へ引いた垂線と α の交点を J とすると，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = (3t,\ 2+4s+4t,\ 6-3s-6t) \qquad \cdots③$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (0,\ 4,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = (3,\ 4,\ -6)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 0\cdot 3t + 4(2+4s+4t) + (-3)(6-3s-6t) = 25s + 34t - 10,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 3\cdot 3t + 4(2+4s+4t) + (-6)(6-3s-6t) = 34s + 61t - 28$$

となる．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} \perp \alpha$ より $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ であるから，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 0\,, \\ \overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち，} \quad \begin{cases} 25s + 34t - 10 = 0\,, \\ 34s + 61t - 28 = 0 \end{cases}$$

となり，$s = -\dfrac{38}{41}$，$t = \dfrac{40}{41}$ を得る．これを③に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \left(\frac{120}{41},\ \frac{90}{41},\ \frac{120}{41}\right)$$

となるので，六角形 DEFGHI を底面と見なしたときの錐体の高さは

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right| = \sqrt{\left(\frac{120}{41}\right)^2 + \left(\frac{90}{41}\right)^2 + \left(\frac{120}{41}\right)^2} = \frac{30}{\sqrt{41}}$$

である．これと②より，錐体の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3}S\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{57}{8}\sqrt{41}\cdot\frac{30}{\sqrt{41}} = \frac{285}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．　**【別解終り】**

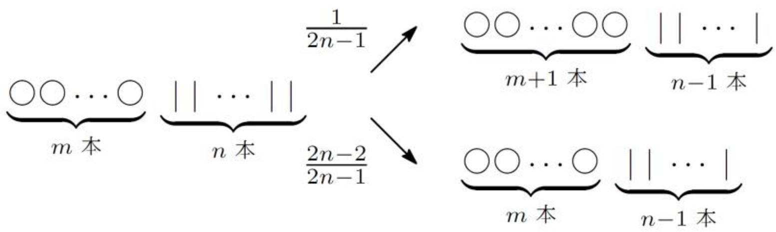
$\boxed{5}$

ひもの端どうしを結ぶ過程において，輪になっているひもが m 本，輪になっていないひもが n 本ある状態を $(m,\ n)$ と表すことにする．最初の状態は $(0,\ 4)$ である．

状態 $(m,\ n)$ において，$n \geqq 1$ のとき，輪になってないひもが n 本あり，その端が合計で $2n$ 個あるので，これら $2n$ 個の端から無作為に 2 個を選んで結ぶ試行を行うと（この試行を T とする），

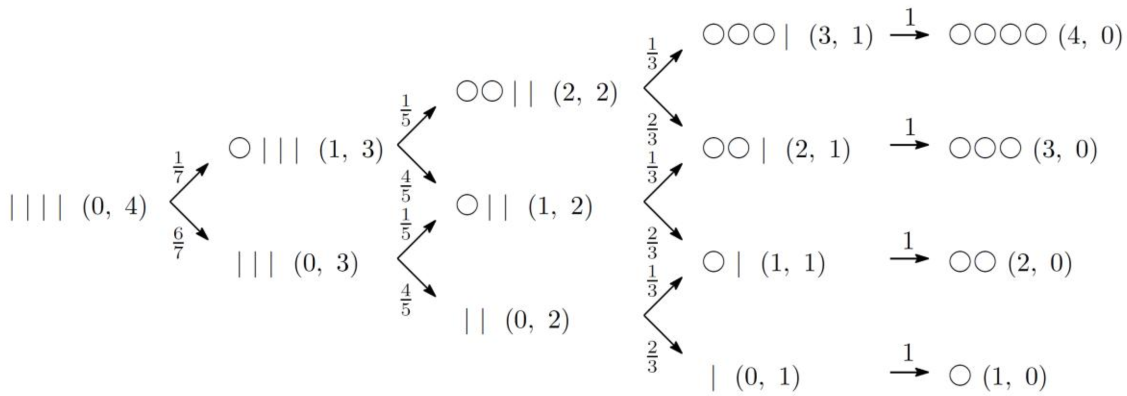
- 1 本のひもにある 2 つの端を結ぶとき $\left(確率\ \dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{2n}\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{2n-1}\right)$
  $\longrightarrow$ 1 本のひもが輪になるので，状態 $(m+1,\ n-1)$ になる．
- 2 本のひもから 1 つずつ選んだ端を結ぶとき $\left(確率\ \dfrac{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2 \cdot 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2} = \dfrac{2n-2}{2n-1}\right)$
  $\longrightarrow$ 2 本のひもが輪になっていない 1 本のひもになるので，状態 $(m,\ n-1)$ になる．

図 1



よって，$(0,\ 4)$ の状態からはじめて，すべての端を結ぶまで試行 T を繰り返すと次の図 2 のようになる．

図 2



$\boxed{5}$ （つづき 1）

(1)　図 2 より，$N=4$ となる確率は，

$$P(N=4)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{105} \qquad \cdots(答)$$

である．

(2)　図 2 より，$N=1$ となる確率は，

$$P(N=1)=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{16}{35} \qquad \cdots(答)$$

である．

(3)　図 2 より，$N=2$ となる確率は，

$$P(N=2)=\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{44}{105}$$

であり，$N=3$ となる確率は，

$$P(N=3)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{4}{35}$$

であるから，これと (1)，(2) の結果を合わせると次の表のようになる．

N	1	2	3	4	合計
確率	$\frac{16}{35}$	$\frac{44}{105}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{105}$	1

よって，N の期待値は

$$\begin{aligned}E(N)&=1\cdot P(N=1)+2\cdot P(N=2)+3\cdot P(N=3)+4\cdot P(N=4)\\&=1\cdot\frac{16}{35}+2\cdot\frac{44}{105}+3\cdot\frac{4}{35}+4\cdot\frac{1}{105}\\&=\frac{176}{105} \qquad \cdots(答)\end{aligned}$$

である．