[1]

大小2個のさいころの目とゲームXにおける得点は次のようになる.

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

(1) 表より，Aさんの得点が5である確率は，

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

(2) 表より，Aさんの得点が5かつ大きいさいころの出た目が5である確率は，

$$\frac{5}{36}$$

よって，Aさんの得点が5であるとき，大きいさいころの出た目が5である条件付き確率は，

$$\frac{\frac{5}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{5}{9}$$

(3) 表より，Aさんの得点と確率は次のようになる.

得点	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

よって，得点の期待値は，

$$\frac{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+5\cdot9+6\cdot11}{36}=\frac{161}{36}$$

(4) AさんとBさんの得点が同じになる確率は，

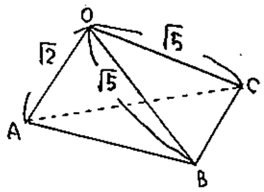
$$\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{3}{36}\right)^2+\left(\frac{5}{36}\right)^2+\left(\frac{7}{36}\right)^2+\left(\frac{9}{36}\right)^2+\left(\frac{11}{36}\right)^2$$

$$=\frac{143}{648}$$

対称性より，Aさんの得点がBさんの得点より大きい確率は

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{143}{648}\right)=\frac{505}{1296}$$

[2]



四面体OABCはすべての面が合同であるから,

$$OA = BC = \sqrt{2},$$
$$OB = OC = AB = AC = \sqrt{5}$$

(1) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} \iff |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{5}$

より,

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = (\sqrt{5})^2$$
$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 5$$
$$5 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2 = 5$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2} \iff |\vec{c} - \vec{b}| = \sqrt{2}$

より,

$$(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = (\sqrt{2})^2$$
$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 = 2$$
$$5 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 5 = 2$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = 4$$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5} \iff |\vec{c} - \vec{a}| = \sqrt{5}$

より,

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = (\sqrt{5})^2$$
$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 = 5$$
$$5 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + 2 = 5$$
$$\vec{c}\cdot\vec{a} = 1$$

(2) $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, tは実数)より,

$$\overrightarrow{OH} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ であるから,

$$\{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$$
$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b} - (1-s-t)|\vec{a}|^2 + s|\vec{b}|^2 - s\vec{a}\cdot\vec{b} + t\vec{b}\cdot\vec{c} - t\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$
$$1-s-t-2+2s+2t+5s-s+4t-t = 0$$
$$5s+4t = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ であるから,

$$\{(1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = 0$$
$$(1-s-t)\vec{c}\cdot\vec{a} - (1-s-t)|\vec{a}|^2 + s\vec{b}\cdot\vec{c} - s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{c}|^2 - t\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$
$$1-s-t-2+2s+2t+4s-s+5t-t = 0$$
$$4s+5t = 1 \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$s = \frac{1}{9},\ t = \frac{1}{9}$$

(3) (2)の結果より,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c} = \frac{1}{9}(7\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

よって,

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{1}{9^2}(7\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(7\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$= \frac{1}{81}(49|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+14\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+14\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$= \frac{1}{81}(98+5+5+14+8+14)$$
$$= \frac{16}{9}$$

$|\overrightarrow{OH}| > 0$ であるから, 垂線OHの長さ$|\overrightarrow{OH}|$は,

$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{4}{3}$$

(4) 三角形ABCの面積をSとおくと, Sは三角形OABの面積でもあるから,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\times5-1}$$
$$= \frac{3}{2}$$

よって, 四面体OABCの体積をVとおくと,

$$V = \frac{1}{3}\times S\times|\overrightarrow{OH}|$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

[3]

(1) 数列$\{a_n\}$の初項をa, 公差をdとすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

より,

$$\begin{cases} a_2 = a + d = 3 \\ a_5 = a + 4d = 9 \end{cases}$$

これを解いて,

$$a = 1,\ d = 2$$

よって,

$$a_n = 1 + 2(n-1)$$
$$= 2n - 1$$

(2)

$$b_{n+1} = \frac{n}{n+1} b_n + \frac{1}{n+1} a_{n+1}$$

より,

$$(n+1) b_{n+1} = n b_n + a_{n+1}$$

$$d_{n+1} = d_n + 2n + 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$d_n = d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$$
$$= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$
$$= \frac{1}{2} n \{1 + (2n-1)\}$$
$$= n^2$$

($n = 1$ のときにも成り立つ)

よって,

$$\begin{cases} d_n = n^2 \\ b_n = n \end{cases}$$

(3)

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) c_n + \frac{1}{n^2(a_{n+1} - b_n)}$$
$$= \frac{n-1}{n} c_n + \frac{1}{n^2(2n+1-n)}$$
$$= \frac{n-1}{n} c_n + \frac{1}{n^2(n+1)}$$

したがって,

$$n c_{n+1} - (n-1) c_n = \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$(n-1) c_n = 0 \cdot c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n-1}{n}$$

よって,

$$c_n = n$$

($n = 1$ のときにも成り立つ)

(4) $n \geqq 1$ のとき

$$\begin{cases} \dfrac{b_{2n-1}}{2} = \dfrac{2n-1}{2} = n - \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{b_{2n}}{2} = \dfrac{2n}{2} = n \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} p_{2n-1} = n - 1 \\ p_{2n} = n \end{cases}$$

したがって,

$$q_{2k+1} - q_{2k-1}$$
$$= 24 c_{2k+1} + p_{2k+1} - (24 c_{2k-1} + p_{2k-1})$$
$$= 24\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) + (k + 1 - k)$$
$$= 1 - \frac{48}{(2k+1)(2k-1)}$$
$$= \frac{4k^2 - 49}{(2k+1)(2k-1)}$$
$$= \frac{(2k+7)(2k-7)}{(2k+1)(2k-1)}$$

よって,

$$q_{2k+1} > q_{2k-1} \iff 2k - 7 > 0$$
$$\iff k > \frac{7}{2}$$
$$\iff k \geqq 4$$

となるから, $q_{2k+1} > q_{2k-1}$ を満たす最小の自然数kは

$$k = 4$$

また,

$$q_{2k+2}-q_{2k}$$

$$=24C_{2k+2}+q_{2k+2}-(24C_{2k}+q_{2k})$$

$$=24\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k}\right)+(k+1-k)$$

$$=1-\frac{12}{k(k+1)}$$

$$=\frac{(k+4)(k-3)}{k(k+1)}$$

より

$$q_{2k+2}\geqq q_{2k} \iff k\geqq 3$$

よって

$$\begin{cases} q_1>q_3>q_5>q_7<q_9<q_{11}<\cdots \\ q_2>q_4>q_6=q_8<q_{10}<q_{12}<\cdots \end{cases}$$

ここで

$$\begin{cases} q_6=24C_6+P_6=\frac{24}{6}+3=7 \\ q_7=24C_7+P_7=\frac{24}{7}+3=\frac{45}{7}<7 \end{cases}$$

であるから, q_n が最小となるときの自然数 n は,

$$n=7$$

〔4〕

(1) $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$
$= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$
$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$
$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$
$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$
$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(2) $f(1)=0$ より,
$1-m+a=0$
$m=a+1$

このとき,
$f(x)=x^2-(a+1)x+a$,
$g(x)=x^3-(a+1)x^2+ax$
であり,
$g'(x)=3x^2-2(a+1)x+a$
$g'(a)<0$ より,
$3a^2-2(a+1)a+a<0$
$a(a-1)<0$
$0<a<1$

(3) $f(x)=(x-a)(x-1)$
であり, $0<a<1$ であるから,
$S_1 = -\int_a^1 (x-a)(x-1)dx$
$= \frac{1}{6}(1-a)^3$

(4) $g(a)=af(a)=0$, $g'(a)=a^2-a$
より, ℓ の方程式は,
$y=(a^2-a)(x-a)$
$y=(a^2-a)x-a^3+a^2$

ℓ と C_1 の共有点の x 座標は,
$x^2-(a+1)x+a=(a^2-a)x-a^3+a^2$
より,
$x^2-(a^2+1)x+a(a^2-a+1)=0$
$(x-a)(x^2-a^2+a-1)=0$
$x=a,\ a^2-a+1$

ここで, $0<a<1$ において,
$(a^2-a+1)-a=(1-a)^2>0$
であるから,
$S_2 = \int_a^{a^2-a+1} \{(a^2-a)x-a^3+a^2-f(x)\}dx$
$= -\int_a^{a^2-a+1} (x-a)(x-a^2+a-1)dx$
$= \frac{1}{6}(a^2-a+1-a)^3$
$= \frac{1}{6}(1-a)^6$

(5) $T=S_1-4S_2$
$= \frac{1}{6}(1-a)^3 - \frac{4}{6}(1-a)^6$
$(1-a)^3=t$ とおくと, $0<a<1$ より, $0<t<1$ であり,
$T=\frac{1}{6}t-\frac{2}{3}t^2$
$= -\frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{96}$
よって, $t=\frac{1}{8}$ のとき T は最大となる.
このとき, $(1-a)^3=\frac{1}{8}$ より,
$1-a=\frac{1}{2}$
$a=\frac{1}{2}$
であり,
$T=\frac{1}{96}$