[1]

大小2個のさいころの目とゲームXにおける得点は次のようになる.

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

(1) 表より, Aさんの得点が5である確率は,

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

(2) 表より, Aさんの得点が5かつ大きいさいころの出た目が5である確率は,

$$\frac{5}{36}$$

よって, Aさんの得点が5であるとき, 大きいさいころの出た目が5である条件付き確率は,

$$\frac{\frac{5}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{5}{9}$$

(3) 表より, Aさんの得点と確率は次のようになる.

得点	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

よって, 得点の期待値は,

$$\frac{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+5\cdot9+6\cdot11}{36}=\frac{161}{36}$$

(4) AさんとBさんの得点が同じになる確率は,

$$\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{3}{36}\right)^2+\left(\frac{5}{36}\right)^2+\left(\frac{7}{36}\right)^2+\left(\frac{9}{36}\right)^2+\left(\frac{11}{36}\right)^2$$

$$=\frac{143}{648}$$

対称性より, Aさんの得点がBさんの得点より大きい確率は

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{143}{648}\right)=\frac{505}{1296}$$

[2]

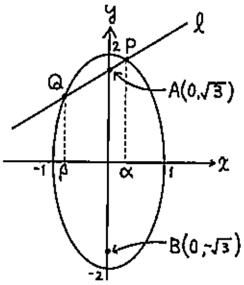
(1) 点A, BはCの焦点である．

lの方程式は$y=mx+\sqrt{3}$．

C, lの方程式からyを消去して

$$x^2+\frac{(mx+\sqrt{3})^2}{4}=1$$

$$(m^2+4)x^2+2\sqrt{3}mx-1=0$$



この方程式の実数解が$\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$であるから

解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4},\quad \alpha\beta=\frac{-1}{m^2+4}$$

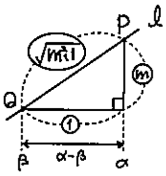
(2) lの傾きがmであり，$\alpha>\beta$から

$$PQ=\sqrt{m^2+1}(\alpha-\beta)$$

$$=\sqrt{m^2+1}\left(\frac{-\sqrt{3}m+\sqrt{4m^2+4}}{m^2+4}-\frac{-\sqrt{3}m-\sqrt{4m^2+4}}{m^2+4}\right)$$

$$=\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}$$

$$=\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}\quad \cdots ①$$



(3) 条件より線分PQ上に点Aは存在し，

$$\alpha\beta=\frac{-1}{m^2+4}<0$$

から$\beta<0<\alpha$である．また，楕円の定義から

$$AP+BP=AQ+BQ=4$$

であり，三角形BPQの周の長さについて

$$BP+PQ+QB=8$$

である．条件より$BP+QB=5$であることから

$$PQ=8-5=3\quad \cdots ②$$

①,②より

$$\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}=3$$

$$m^2=8$$

$m>0$より

$$m=2\sqrt{2}$$

(4) $m=2\sqrt{2}$のとき

$$\alpha-\beta=\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}=\frac{4\cdot3}{8+4}=1$$

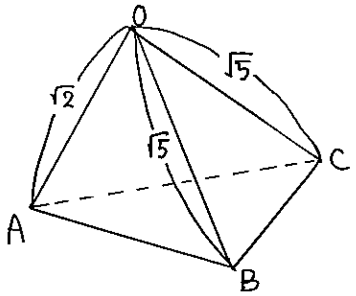
であるから三角形BPQの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(\alpha-\beta)\cdot AB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}$$

[3]



すべての面が合同な四面体であるから

$AB=OC=\sqrt{5}$

$BC=OA=\sqrt{2}$

$CA=OB=\sqrt{5}$ である．

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$ であり，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$ より

$5=5-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$ より

$2=5-2\vec{b}\cdot\vec{c}+5$

よって，$\vec{b}\cdot\vec{c}=4$

$|\overrightarrow{CA}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2$ より

$5=2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+5$

よって，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1^2}=\frac{3}{2}$

(2) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$

$=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$

$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ だから

$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-s-t)(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)+s(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})$
$+t(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

(1)の結果を代入して $5s+4t=1$ …(i)

また，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ だから．

$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

(1)の結果を代入して $4s+5t=1$ …(ii)

(i)と(ii)より $s=\frac{1}{9}$, $t=\frac{1}{9}$

(3) (2)より $\overrightarrow{OH}=\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}$

$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{1}{81}|7\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=\frac{1}{81}(49|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+14\vec{a}\cdot\vec{b}$
$+2\vec{b}\cdot\vec{c}+14\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\frac{16}{9}$

$|\overrightarrow{OH}|=\frac{4}{3}$

(4) $\overrightarrow{OH}=\frac{8}{9}\cdot\frac{7\vec{a}+\vec{b}}{8}+\frac{1}{9}\vec{c}$

線分ABを $1:7$ に内分する点をDとすると

$\overrightarrow{OD}=\frac{7\vec{a}+\vec{b}}{8}$ であるから

$\overrightarrow{OH}=\frac{8}{9}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}$

これより，点Hは線分CDを $8:1$ に内分する点であり，平面OCHは平面OCDと一致し，この平面によって四面体OABCは四面体OACDと四面体OBCDに分けられる．

(四面体OACDの体積)：(四面体OBCDの体積)

$=\triangle ACD:\triangle BCD$

$=AD:DB=1:7$

よって，体積が小さい方の立体は四面体OACDであり，その体積は，

$\frac{1}{3}\triangle ACD\cdot OH$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\triangle ABC\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\triangle OAB\cdot OH=\frac{1}{12}$

〔4〕

(1) $f(x)=x(1+x^2)^{-p}$ $(x\geqq 0)$ とする.

$$f'(x)=1(1+x^2)^{-p}+x(-p)(1+x^2)^{-p-1}(2x)$$
$$=(1+x^2)^{-p-1}\{(1+x^2)-2px^2\}$$
$$=(1+x^2)^{-p-1}\{1-(2p-1)x^2\}$$

$p>2$ より

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2p-1}}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より求める値は

$$a=\frac{1}{\sqrt{2p-1}}$$

(2) $1+x^2=t$ とおくと $2x\,dx=dt$

$$2x^3\,dx=x^2\cdot 2x\,dx=(t-1)\,dt$$

よって

$$\int 2x^3(1+x^2)^{-p}dx=\int (t-1)t^{-p}dt$$
$$=\int (t^{1-p}-t^{-p})dt=\frac{t^{2-p}}{2-p}-\frac{t^{1-p}}{1-p}+C$$
$$=\frac{(1+x^2)^{2-p}}{2-p}-\frac{(1+x^2)^{1-p}}{1-p}+C$$ (Cは積分定数)

(3) (1)より $a^2=\frac{1}{2p-1}$ $\quad 1+a^2=\frac{2p}{2p-1}$

$1+x^2=t$ とおくと $x\,dx=\frac{1}{2}dt$

x	$0\to a$
t	$1\to u$

(ただし, $u=\frac{2p}{2p-1}$)

$$S(p)=\int_0^a x(1+x^2)^{-p}dx=\int_1^u \frac{1}{2}t^{-p}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^u=\frac{1}{2(1-p)}(u^{1-p}-1)$$
$$=\frac{1}{2(p-1)}\left\{1-\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{1-p}\right\}$$
$$pS(p)=\frac{p}{2(p-1)}\left\{1-\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{1-p}\right\}$$

ここで, $\frac{p}{2(p-1)}=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}\xrightarrow[(p\to\infty)]{}\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{1-p}=\left(\frac{2p-1}{2p}\right)^{p-1}$$
$$=\left\{\left(1+\frac{1}{-2p}\right)^{-2p}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{-2p}\right)^{-1}$$
$$\xrightarrow[(p\to\infty)]{} e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

よって,

$$\lim_{p\to\infty}pS(p)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

(4) (1), (2), (3)の計算より,

$$T(p)=\int_0^a 2x^3(1+x^2)^{-p}dx$$
$$=\left[\frac{(1+x^2)^{2-p}}{2-p}-\frac{(1+x^2)^{1-p}}{1-p}\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2-p}\left\{(1+a^2)^{2-p}-1\right\}-\frac{1}{1-p}\left\{(1+a^2)^{1-p}-1\right\}$$
$$=\frac{1}{p-2}\left\{1-(1+a^2)^{2-p}\right\}-\frac{1}{p-1}\left\{1-(1+a^2)^{1-p}\right\}$$
$$=\frac{1}{p-2}\left\{1-\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2-p}\right\}-\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{1-p}\right\}$$
$$=\frac{1}{p-2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2}\right\}-\frac{1}{p-1}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-1}\right\}$$

よって,

$$p^2T(p)$$
$$=p^2\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}\right)+p^2\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-1}}{p-1}-\frac{\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2}}{p-2}\right\}$$

ここで,

$$p^2\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}\right)=\frac{p^2}{(p-2)(p-1)}$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}\xrightarrow[(p\to\infty)]{}1$$

$$p^2\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-1}}{p-1}-\frac{\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2}}{p-2}\right\}$$
$$=p^2\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2}\left(\frac{1-\frac{1}{2p}}{p-1}-\frac{1}{p-2}\right)$$
$$=p^2\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2p}\right)(p-2)-(p-1)}{(p-1)(p-2)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-2} \cdot \frac{p^2}{(p-1)(p-2)}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2p}\right)^{p-1}\left(1-\frac{1}{2p}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \quad \text{（(3)の計算より）}$$
$(p \to \infty)$

したがって，

$$\lim_{p \to \infty} p^2 T(p) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

[5]

(1) すべての自然数 n に対して

a_n は正の有理数 …㊟

であることを数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=1$ のとき $a_1=2$ より ㊟は成立.

(ii) $n=k$ (k: 自然数) のとき, ㊟が成立するとする. すなわち,

$$a_k = q \quad (q: \text{正の有理数})$$

とすると, このとき,

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k} = q + \frac{1}{q}$$

より, a_{k+1} も正の有理数.

よって, $n=k+1$ のときも㊟は成立する.

(i), (ii) より ㊟は成立.

(2) すべての自然数 n に対して

$$a_n \geqq \sqrt{2n+2} \quad \cdots ㊟㊟$$

であることを数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=1$ のとき ㊟㊟の

(左辺) $= a_1 = 2$, (右辺) $= \sqrt{2\cdot1+2} = 2$.

よって $n=1$ のとき ㊟㊟は成立.

(ii) $n=k$ (k: 自然数) のとき, ㊟㊟が成立するとする. すなわち,

$$a_k \geqq \sqrt{2k+2}$$

とする. このとき, (1) の結果より, a_k は正だから, 両辺2乗して,

$$a_k^2 \geqq 2k+2 \quad \cdots ①$$

ここで, 与えられている漸化式より,

$$a_{k+1}^2 = \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2 = a_k^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2}$$

このとき, $\frac{1}{a_k^2} > 0$ であることと, ①より

$$a_{k+1}^2 > (2k+2)+2+0 = 2k+4$$

a_{k+1} は正より, 両辺の平方根をとって,

$$a_{k+1} > \sqrt{2k+4} = \sqrt{2(k+1)+2}$$

これは ㊟㊟ が $n=k+1$ のときも成立することを示している.

(i), (ii) より ㊟㊟は成立.

(3) すべての自然数 n に対して,

$$a_n \leqq \sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n} \quad \cdots ㊟㊟㊟$$

であることを示す.

(2) の結果より,

$$a_n^2 \geqq 2n+2$$

であるから,

$$\frac{1}{a_n^2} \leqq \frac{1}{2n+2}.$$

よって,

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} \leqq a_n^2 + 2 + \frac{1}{2n+2} \quad \cdots ②$$

$n \geqq 2$ のとき

②に $n=1,2,3,\cdots,n-1$ を順に代入して,

$$a_2^2 \leqq a_1^2 + 2 + \frac{1}{2\cdot 1+2}$$

$$a_3^2 \leqq a_2^2 + 2 + \frac{1}{2\cdot 2+2}$$

$$a_4^2 \leqq a_3^2 + 2 + \frac{1}{2\cdot 3+2}$$

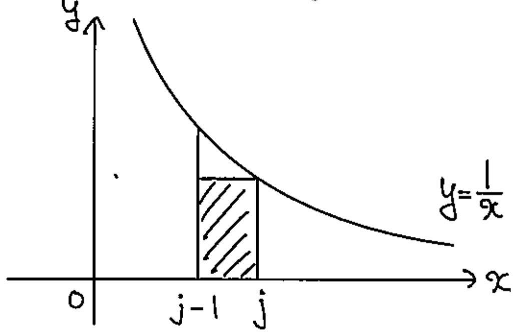
$$\vdots$$

$$a_n^2 \leqq a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{2(n-1)+2}$$

辺々加えると,

$$a_n^2 \leqq a_1^2 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+2}$$

$$= 2n+2+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \quad \cdots ③$$



ここで $j \geqq 2$ に対して,

$$\frac{1}{j} \leqq \int_{j-1}^{j}\frac{1}{x}\,dx.$$

よって,

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \leqq \int_{1}^{n}\frac{1}{x}\,dx = \log n.$$

したがって③より,

$$a_n^2 \leqq 2n+2+\frac{1}{2}\log n.$$

(1)の結果より a_n は正だから,

$$a_n \leqq \sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}$$

(これは $n=1$ のときも成立つ)

よって ※※※ が示せた.

((3)の別解)

すべての自然数 n に対して

$$a_n \leqq \sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n} \quad \cdots ※※※$$

であることを数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=1$ のとき, ※※※ の

(左辺)$=a_1=2$, (右辺)$=\sqrt{2\cdot 1+2+\frac{1}{2}\log 1}=2$

よってこのとき ※※※ は成立.

(ii) $n=k$ (k:自然数) のとき

※※※ が成立するとする. すなわち

$$a_k \leqq \sqrt{2k+2+\frac{1}{2}\log k} \quad \cdots ④$$

とする. ここで, 漸化式

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$$

より, 両辺2乗すると,

$$a_{k+1}^2 = \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2$$

$$= a_k^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2}$$

$$\leqq \left(2k+2+\frac{1}{2}\log k\right) + 2 + \frac{1}{a_k^2}$$

(④より)

$$= 2k+4+\frac{1}{2}\log k + \frac{1}{a_k^2}.$$

このとき, (2)の結果より,

$$a_k \geqq \sqrt{2k+2}$$

であるから,

$$a_k^2 \geqq 2k+2.$$

$$\frac{1}{a_k^2} \leqq \frac{1}{2k+2}.$$

よって,

$$a_{k+1}^2 \leqq 2k+4+\frac{1}{2}\log k + \frac{1}{2k+2}. \quad \cdots ⑤$$

また,

$$2(k+1)+2+\frac{1}{2}\log(k+1)$$
$$-\left(2k+4+\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\} \quad \cdots⑥$$

ここで, $f(x)=\log x$ について, $x>0$ において連続しており, 微分可能であるから, 平均値の定理より, 自然数 k に対して,

$$\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}=f'(c) \quad (k<c<k+1)$$

となる c が存在する. よって,

$$\log(k+1)-\log k=\frac{1}{c}$$

となる c が存在しており,

$\frac{1}{k+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{k}$ であるから,

$$\log(k+1)-\log k>\frac{1}{k+1} \quad \cdots⑦$$

⑥,⑦より

$$2(k+1)+2+\frac{1}{2}\log(k+1)-\left(2k+4+\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2k+2}\right)>0.$$

したがって,

$$2k+4+\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2k+2}<2(k+1)+2+\frac{1}{2}\log(k+1) \quad \cdots⑧$$

⑤,⑧より

$$a_{k+1}^2<2(k+1)+2+\frac{1}{2}\log(k+1)$$

(1)の結果より a_{k+1} は正だから,

$$a_{k+1}<\sqrt{2(k+1)+2+\frac{1}{2}\log(k+1)}$$

これは(※※)が $n=k+1$ のときも成立することを示している.

(i), (ii)よりすべての自然数 n で(※※)は成立する.

((3)の別解終り)

(4) (2), (3)の結果より

$$\sqrt{2n+2}\leqq a_n\leqq\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}$$

$$\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}\leqq a_n-\sqrt{2n}\leqq\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}-\sqrt{2n} \quad \cdots㋐$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}-\sqrt{2n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2}\log n}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log n}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}\right)$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}+\sqrt{2n}}\cdot\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{\log n}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$
$$=0$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+2+\frac{1}{2}\log n}-\sqrt{2n}\right)=0. \quad \cdots㋒$$

㋐, ㋑, ㋒より, はさみうちの原理から,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2n})=0.$$