$\boxed{1}$ (1)　$f(x)=x^3-2x^2$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-4x$$
$$=x(3x-4)$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

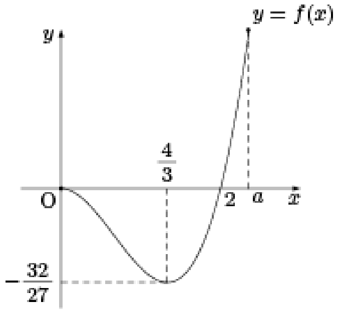
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗

よって

極大値は $f(0)=0$　　…(答)

極小値は $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{32}{27}$　　…(答)

(2)　$f(x)=x^2(x-2)$ より $f(2)=0$ であるから，(1) の結果と合わせて，$0\leqq x\leqq a$ $(a>2)$ における $y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



よって，$f(x)$ の最大値は

$$f(a)=a^3-2a^2 \quad \cdots(\text{答})$$

(3)　(2) のグラフより

$$\int_0^a |f(x)|\,dx=\int_0^2\{-f(x)\}\,dx+\int_2^a f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2(-x^3+2x^2)\,dx+\int_2^a(x^3-2x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_2^a$$
$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$　$a_1 = 4$

$$a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

(1)　まず, $a_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より $a_n + 1 \fallingdotseq 0$ であるから, ①より

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1} \qquad \cdots ②$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ のとき，② より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1} + 2} \\ &= \frac{1}{\dfrac{2}{a_n + 1} + 2} \\ &= \frac{1}{\dfrac{2 + 2(a_n + 1)}{a_n + 1}} \\ &= \frac{a_n + 1}{2a_n + 4} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a_n + 2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - b_n) \end{aligned}$$

よって

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \qquad \cdots(答)$$

＜(1) の別解＞

$b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ のとき $b_n \fallingdotseq 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり

$$a_n + 2 = \frac{1}{b_n}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 2$$

これと

$$a_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} - 2$$

を①に代入すると

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}} - 2\right)\left(\frac{1}{b_n} - 1\right) = 2$$

$$\frac{1}{b_n b_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{2}{b_n} = 0$$

$$1 - b_n - 2b_{n+1} = 0$$

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) の結果を変形すると

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{3} + \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで, $b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ と $a_1 = 4$ より

$$b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

であるから

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3}\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n + (-1)^n}{2^n} \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{a_n + 2} = \frac{2^n + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

$$a_n + 2 = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + (-1)^n}$$

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + (-1)^n} - 2$$

$$a_n = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n} \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$ (1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 0,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ -2)$　$\cdots$ ①

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=s(0,\ 0,\ 2)+t(-1,\ -1,\ -2)\\&=(-t,\ -t,\ 2s-2t)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(0,\ 1,\ 0)+(-t,\ -t,\ 2s-2t)\\&=(-t,\ 1-t,\ 2s-2t)\end{aligned}\qquad\cdots②$$

よって

$$\mathrm{H}(-t,\ 1-t,\ 2s-2t)\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad\text{かつ}\quad\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

つまり

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 & \cdots③\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 & \cdots④\end{cases}$$

が成り立つ. ①, ②を用いると, ③は

$$\begin{aligned}2(2s-2t)&=0\\s&=t\end{aligned}\qquad\cdots⑤$$

④は

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(-t)+(-1)\cdot(1-t)+(-2)\cdot(2s-2t)&=0\\-4s+6t-1&=0\end{aligned}\qquad\cdots⑥$$

⑤, ⑥より

$$s=\frac{1}{2},\ t=\frac{1}{2}$$

(1) の結果を用いると

$$\mathrm{H}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\qquad\cdots(\text{答})$$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

が成り立つ. ①より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=4,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=6,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-4$$

であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot6-(-4)^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

である. 一方, (2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

である.

よって, 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\mathrm{OH}\\&=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}\qquad\cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$ 1回の試行で, 得点が

(i) 3 倍となる確率は $\frac{1}{6}$

(ii) 5 倍となる確率は $\frac{1}{6}$

(iii) 2 倍となる確率は $\frac{2}{3}$

であり, (i), (ii), (iii) が起こる回数を順に a, b, c とおく.

(1)　3 回試行したとき, 最後の持ち点が 4 の倍数となるのは, 持ち点が 2 倍となる回数が 2 または 3, つまり

$$c=2,\ 3$$

のときであるから, 求める確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27} \qquad \cdots(答)$$

(2)　4 回試行したとき, 最後の持ち点が平方数となるのは

$$(a,\ b,\ c)=(4,\ 0,\ 0),\ (0,\ 4,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4),\ (2,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ 2),\ (0,\ 2,\ 2)$$

のときであるから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1+1+256+6+96+96}{6^4}=\frac{19}{54} \qquad \cdots(答)$$

＜(1) の別解＞

3 回試行したとき, 最後の持ち点が 4 の倍数とならないのは

$$c=0,\ 1$$

のときであり, その確率は

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{27}$$

よって, 求める確率は

$$1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27} \qquad \cdots(答)$$