$\boxed{1}$　$a_1=-8$

$$a_{n+1}(a_n+1)=2 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

(1)　まず ① より $a_n+1 \fallingdotseq 0$ であるから

$$a_{n+1}=\frac{2}{a_n+1} \qquad \cdots ②$$

次に，すべての正の整数 n について

$$a_n \fallingdotseq -2 \qquad \cdots ③$$

であることを数学的帰納法で示す．

[I]　$n=1$ のとき，$a_1=-8$ より ③ は成り立つ．

[II]　$n=k$ $(k \geqq 1)$ のとき ③ が成り立つと仮定，すなわち $a_k \fallingdotseq -2$ と仮定する．このとき，② より

$$\begin{aligned} a_{k+1}-(-2) &= \frac{2}{a_k+1}+2 \\ &= 2\cdot\frac{a_k+2}{a_k+1} \qquad \cdots ④ \\ &\fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

よって，$a_{k+1} \fallingdotseq -2$ であるから，$n=k+1$ のときも ③ は成り立つ．

以上 [I]，[II] より，すべての正の整数 n について ③ が成り立つ．　（証明終り）

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ のとき，④より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}+2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a_n+1}{a_n+2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a_n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-b_n) \end{aligned}$$

よって

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2} \qquad \cdots(答)$$

(3)　(2) の結果を変形すると

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\frac{1}{3}+\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで，$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ と $a_1=-8$ より

$$b_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$$

であるから

$$b_n=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n+2} &= \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2^n+3(-1)^n}{3\cdot 2^n} \end{aligned}$$

$$a_n+2=\frac{3\cdot 2^n}{2^n+3(-1)^n}$$

$$a_n=\frac{3\cdot 2^n}{2^n+3(-1)^n}-2$$

$$a_n=\frac{2^n-6(-1)^n}{2^n+3(-1)^n} \qquad \cdots(答)$$

＜(1) の別解＞

$a_1=-8$ より $a_1 \fallingdotseq -2$ である．

次に

$$a_n \fallingdotseq -2 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

であることを背理法で示す．

$a_k=-2$ となる 2 以上の整数 k が存在すると仮定する．

①より，この k に対して

$$a_k(a_{k-1}+1)=2$$

が成り立つから

$$-2(a_{k-1}+1)=2$$

$$a_{k-1}=-2$$

これをくり返すと

$$a_k=a_{k-1}=\cdots=a_2=a_1=-2$$

となるが，これは $a_1=-8$ に矛盾する．

よって

$$a_n \fallingdotseq -2 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

以上より

$$a_n \fallingdotseq -2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．　（証明終り）

＜(2) の別解＞

$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ のとき $b_n \fallingdotseq 0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり

$$a_n+2=\frac{1}{b_n}$$

$$a_n=\frac{1}{b_n}-2$$

これと

$$a_{n+1}=\frac{1}{b_{n+1}}-2$$

を①に代入すると

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}}-2\right)\left(\frac{1}{b_n}-1\right)=2$$

$$\frac{1}{b_nb_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{2}{b_n}=0$$

$$1-b_n-2b_{n+1}=0$$

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2} \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{2}$ (1)
$$\int t\sin(x-t)\,dt$$
$$= t\cos(x-t) - \int \cos(x-t)\,dt$$
$$= t\cos(x-t) + \sin(x-t) + C \qquad (C：積分定数)$$

であるから
$$\int_0^x t\sin(x-t)\,dt = \Big[t\cos(x-t) + \sin(x-t)\Big]_0^x$$
$$= x - \sin x \qquad \cdots(答)$$

(2)
$$f(x) = \int_0^x \left\{\sin(x-t) - \frac{t}{4}\right\}^2 dt$$
$$= \int_0^x \sin^2(x-t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x t\sin(x-t)\,dt + \frac{1}{16}\int_0^x t^2\,dt$$

である．ここで
$$\int_0^x \sin^2(x-t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \{1-\cos 2(x-t)\}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2(x-t)\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$
$$= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$$

であり
$$\int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{3}x^3$$

であるから，(1) の結果も用いて
$$f(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) - \frac{1}{2}(x - \sin x) + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}x^3$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos x)\sin x + \frac{1}{48}x^3 \qquad \cdots(答)$$

(3)　(2) の結果を用いて
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{48}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x^2}\cdot\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{48}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + \frac{1}{48}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1}\cdot 1^3 + \frac{1}{48}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{48}$$
$$= \frac{13}{48} \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$ (1)　$\alpha=x+yi$ (x, y : 実数) とおく.
α は C 上にあることより

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots ①$$

α は $|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$ を満たすことより

$$|2x|=|2yi|$$
$$|x|=|y|$$
$$x^2=y^2 \qquad \cdots ②$$

①, ②より

$$x^2=\frac{1}{2},\ y^2=\frac{1}{2}$$

α の偏角 θ は $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ を満たすので

$$x<0,\ y>0$$

であるから

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上より

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad \cdots(答)$$

(2)　β は $\beta^3=1$ すなわち

$$(\beta-1)\left(\beta-\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(\beta-\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)=0$$

を満たし, β の虚部は正であることから

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

点 z は β を除く C 上を動くので

$$|z|=1,\ z\neq\beta \qquad \cdots ③$$

点 w は $w(z-\beta)=1$ を満たすので, $w\neq0$ であり

$$z=\frac{1}{w}+\beta \qquad \cdots ④$$

③, ④より

$$\left|\frac{1}{w}+\beta\right|=1$$

これを変形して

$$|1+\beta w|=|w|$$
$$|\beta|\left|\frac{1}{\beta}+w\right|=|w|$$

ここで

$$|\beta|=\left|\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right|=1$$

であるから

$$\left|w+\frac{1}{\beta}\right|=|w|$$

また

$$\frac{1}{\beta}=\frac{2}{-1+\sqrt{3}\,i}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

より

$$\left|w-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right|=|w| \qquad \cdots ⑤$$

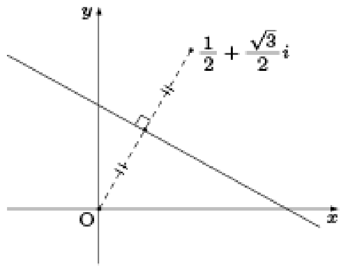
⑤を満たすすべての w について, ④で定まる z は③を満たすので, 点 w が描く図形は

点 $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ と原点から等距離である点の集合全体

すなわち

点 $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ と原点を結ぶ線分の垂直二等分線全体

であり, これを図示すると次のようになる.



…(答)

〈参考〉
(2) で w が描く直線の方程式は次のようにしても求められる.
$|1+\beta w|=|w|$ において, $w=x+yi$ (x, y : 実数) とおくと

$$\left|1+\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}(x+yi)\right|=|x+yi|$$

$$\left|\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i\right|=|x+yi|$$

よって

$$\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2=x^2+y^2$$

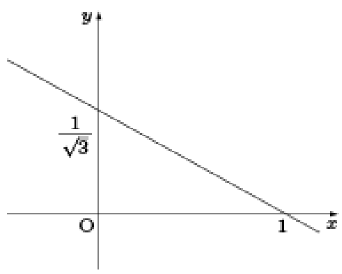
展開すると

$$x^2+y^2-x-\sqrt{3}\,y+1=x^2+y^2$$

したがって

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

これを図示すると次のようになる.



$\boxed{4}$ (1)　平面 α 上の任意の点を X とすると, s, t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{CX}} = s\overrightarrow{\mathrm{CP}} + t\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$

と表せる．このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CP}} + t\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\\ &= (0,\ 0,\ h) + s(1,\ 0,\ 3-h) + t(0,\ 2,\ 3-h)\\ &= \bigl(s,\ 2t,\ h + s(3-h) + t(3-h)\bigr) \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

点 X が x 軸上にあるとき，①より

$$\begin{cases} 2t = 0 \\ h + s(3-h) + t(3-h) = 0 \end{cases}$$

$h-3>0$ であるから

$$s = \frac{h}{h-3},\ t = 0$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{h}{h-3},\ 0,\ 0\right)$$

より，A の x 座標は

$$\frac{h}{h-3} \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) と同様にして, X が y 軸上にあるとき，①より

$$\begin{cases} s = 0 \\ h + s(3-h) + t(3-h) = 0 \end{cases}$$

$h-3>0$ であるから

$$s = 0,\ t = \frac{h}{h-3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(0,\ \frac{2h}{h-3},\ 0\right)$$

以上より

$$\mathrm{A}\left(\frac{h}{h-3},\ 0,\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{2h}{h-3},\ 0\right),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ h)$$

このとき

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\right)\cdot\mathrm{OC}\end{aligned}$$

$h>3$ より

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{h-3}\cdot\frac{2h}{h-3}\cdot h\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{(h-3)^2} \qquad \cdots(答)\end{aligned}$$

(3)　(2) の結果より

$$f(h) = \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{(h-3)^2} \qquad (h>3)$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(h) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3h^2(h-3)^2 - h^3\cdot 2(h-3)}{(h-3)^4}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2\{3(h-3)-2h\}}{(h-3)^3}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2(h-9)}{(h-3)^3}\end{aligned}$$

であるから, $f(h)$ の $h>3$ における増減は次のようになる．

h	(3)	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(h)$	＼	$-$	0	$+$
$f(h)$	＼	↘	最小	↗

$$f(9) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9^3}{6^2} = \frac{27}{4}$$

したがって, V は $h=9$ のとき最小となり，求める最小値は

$$\frac{27}{4} \qquad \cdots(答)$$

〈参考〉

平面 α を表す方程式を用いて点 A, B の座標を求めることもできる．

$$\vec{n} = \bigl(2(h-3),\ h-3,\ 2\bigr)$$

とおくと

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} = 0,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 0$$

が成り立つので

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}},\ \vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$

よって, $\vec{n}$ は平面 α の法線ベクトルである．したがって, α の方程式は

$$2(h-3)x + (h-3)y + 2(z-h) = 0$$

より

$$2(h-3)x + (h-3)y + 2z - 2h = 0 \qquad \cdots ②$$

x 軸との交点は②において

$$y = 0,\ z = 0$$

とすると

$$x = \frac{h}{h-3}$$

であるから

$$\mathrm{A}\left(\frac{h}{h-3},\ 0,\ 0\right)$$

y 軸との交点は②において

$$x = 0,\ z = 0$$

とすると

$$y = \frac{2h}{h-3}$$

であるから

$$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{2h}{h-3},\ 0\right)$$

$\boxed{5}$ 1回の試行で, 持ち点が

(i) 3倍となる確率は $\dfrac{1}{6}$

(ii) 5倍となる確率は $\dfrac{1}{6}$

(iii) 2倍となる確率は $\dfrac{2}{3}$

であり, (i), (ii), (iii) が起こる回数を順に $a,\ b,\ c$ とおく.

(1) n 回試行 $(n \geqq 2)$ したとき, 最後の持ち点が4の倍数にならないのは

$$c = 0,\ 1$$

のときであり, その確率は

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{2}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + n\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ &= (2n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

よって, 求める確率は

$$1-(2n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 1回目の試行後の持ち点の最大値は $1\times 5 = 5$

4回目の試行後の持ち点の最小値は $1\times 2\times 2\times 2\times 2 = 16$ であるから, 終了するまでに試行した回数は2, 3, 4のいずれかである.

2回で終了するのは

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0)$$

のときであり, その確率は

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

4回で終了するのは

$(a,\ b,\ c) = (0,\ 0,\ 3)$ のあと4回目は (i), (ii), (iii) のいずれか

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 0,\ 2)$ のあと4回目は (i), (ii), (iii) のいずれか

のときであり, その確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 1 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 1 = \frac{14}{27}$$

3回で終了する確率は

$$1-\frac{1}{12}-\frac{14}{27} = \frac{43}{108}$$

以上より, 求める期待値は

$$2\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot\frac{43}{108} + 4\cdot\frac{14}{27} = \frac{371}{108} \qquad \cdots(\text{答})$$

＜参考＞

(2) において, 3回で終了する確率は次のように求めることもできる.

3回で終了するのは

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 0,\ 1)$ のあと3回目は (i) または (ii)

$(a,\ b,\ c) = (2,\ 0,\ 0)$ のあと3回目は (i), (ii), (iii) のいずれか

$(a,\ b,\ c) = (0,\ 1,\ 1)$ のあと3回目は (i), (ii), (iii) のいずれか

$(a,\ b,\ c) = (0,\ 0,\ 2)$ のあと3回目は (ii)

のときであり, その確率は

$$\begin{aligned}&{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 1\\ &\qquad + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\\ &= \frac{43}{108}\end{aligned}$$