$\boxed{1}$

(1) $a_{n+2}=\dfrac{3^n a_{n+1}^2}{a_n}$

の両辺の底が 2 の対数をとって，

$\log_2 a_{n+2}=\log_2\dfrac{3^n a_{n+1}^2}{a_n}$

$=n\log_2 3+2\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n$.

よって，

$\log_2 a_{n+2}-\log_2 a_{n+1}$

$=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n+n\log_2 3$

より，

$b_{n+1}=b_n+n\log_2 3$.

$b_{n+1}-b_n=n\log_2 3$.

ここで，$a_1=1$，$a_2=2$ より，

$b_1=\log_2 a_2-\log_2 a_1$

$=\log_2 2-\log_2 1=1$.

したがって，$n\geqq 2$ のとき，

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k\log_2 3$

$=1+(\log_2 3)\frac{1}{2}(n-1)n$ ，…(答)

（これは，$n=1$ のときも成立）

(2) (1)の結果より，

$\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n$

$=1+(\log_2 3)\frac{1}{2}(n-1)n$

であるから，

$n\geqq 2$ のとき，

$\log_2 a_n$

$=\log_2 a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\frac{\log_2 3}{2}(k-1)k\right\}$

$=\log_2 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\frac{\log_2 3}{2}(k^2-k)\right\}$

$=(n-1)+\frac{\log_2 3}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$

$=(n-1)+\frac{\log_2 3}{6}(n-2)(n-1)n$.

（これは $n=1$ のときも成立）

したがって，

$a_n=2^{n-1+\frac{\log_2 3}{6}(n-2)(n-1)n}$

$=2^{n-1}\cdot 3^{\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n}$ ，…(答)

2

$OA = OB = OC = 1$,
$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$ より,

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}. \end{array}\right) \cdots ①$$

(1) 4点 A, D, E, P は同一平面上にあるので

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AE}$$
$$= -(\alpha+\beta)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OD} + \beta\overrightarrow{OE}$$
$$= -(\alpha+\beta)\vec{a} + \alpha t\vec{b} + \beta(2t+1)\vec{c} \quad \cdots ②$$

となる実数 α, β がある.

$$\overrightarrow{OP} = (1-\alpha-\beta)\vec{a} + \alpha t\vec{b} + \beta(2t+1)\vec{c}$$

であり,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = -1,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = 1$$

より

$$\begin{cases} (1-\alpha-\beta)|\vec{a}|^2 + \alpha t\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta(2t+1)\vec{a}\cdot\vec{c} = -1, \\ (1-\alpha-\beta)\vec{a}\cdot\vec{b} + \alpha t|\vec{b}|^2 + \beta(2t+1)\vec{b}\cdot\vec{c} = 1. \end{cases}$$

①を代入すると,

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 2, \\ (\alpha+\beta)t + \frac{1}{2}\beta = 1, \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} \alpha = 4t, \\ \beta = 2-4t. \end{cases}$$

②に代入すると,

$$\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} + 2(1-4t^2)\vec{c}. \quad \cdots (答)$$

(2) $4t^2 = u$ とおくと, $t>0$ のとき $u>0$ であり

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |-2\vec{a} + u\vec{b} + 2(1-u)\vec{c}|^2$$
$$= 4|\vec{a}|^2 + u^2|\vec{b}|^2 + 4(1-u)^2|\vec{c}|^2$$
$$+ 2\{-2u\vec{a}\cdot\vec{b} + 2u(1-u)\vec{b}\cdot\vec{c} - 4(1-u)\vec{c}\cdot\vec{a}\}.$$

①を代入すると,

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 4 + u^2 + 4(1-u)^2 + 2u(1-u)$$
$$= 3u^2 - 6u + 8$$
$$= 3(u-1)^2 + 5.$$

これは $u = 4t^2 = 1$ のとき最小となるので, $t>0$ より $|\overrightarrow{AP}|$ を最小にする t の値は

$$\frac{1}{2} \quad \cdots (答)$$

であり, $|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は

$$\sqrt{5}. \quad \cdots (答)$$

$\boxed{3}$

$f(x)$

$= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_{x-1}^{x}$

$= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6\left\{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2\right\}$

$= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$

$= 4ax^3 - 6x^2 + \frac{1}{a}.$

よって

$f'(x)$

$= 12ax^2 - 12x$

$= 12ax\left(x - \frac{1}{a}\right).$

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき.

$0 < x < 1$ において $f(x) < 0$ であるから

$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)$ は単調減少.

最小値は,

$f(1) = 4a - 6 + \frac{1}{a}.$

$f(1) > 0$ を解くと

$4a - 6 + \frac{1}{a} > 0$

$4a^2 - 6a + 1 > 0$　($a > 0$ より)

$a < \frac{3-\sqrt{5}}{4},\ \frac{3+\sqrt{5}}{4} < a.$

$0 < a \leqq 1$ より

$0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$

(ii) $a > 1$ のとき,

$f(x)$ の増減は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

最小値は

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{2}{a^2} + \frac{1}{a}.$

$f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ を解くと

$-\frac{2}{a^2} + \frac{1}{a} > 0$

$a - 2 > 0$　($a^2 > 0$ より)

$a > 2.$

(i)(ii)より求める a の値の範囲は,

$0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{4},\ 2 < a.$ …(答)