# 1

(1) $y=x-x^3$ より，$y'=1-3x^2$.

曲線 C 上の点 $(s, s-s^3)$ での接線 $l_s$ の方程式は，

$$y-(s-s^3)=(1-3s^2)(x-s)$$
$$y=(1-3s^2)x+2s^3.$$

これより，$0<t<1$ に対して，3 直線は

$$l_t : y=(1-3t^2)x+2t^3,$$
$$l_0 : y=x,$$
$$l_1 : y=-2x+2$$

であるから，

$$P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),\ Q\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right),$$
$$R\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(1+t)}, \frac{-2(2t^2-t-1)}{3(1+t)}\right).$$

よって，

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}(t-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{PR}=\frac{2t^2}{3(1+t)}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

より，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{3}(t-1)\cdot\frac{2t^2}{3(1+t)}\right|\left|1\cdot(-2)-1\cdot 1\right|$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^2(1-t)}{1+t}\quad(0<t<1 \text{ より})$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{-t^3+t^2}{1+t}. \qquad \cdots(答)$$

(2) $0<t<1$ に対して，

$$S'(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{(-3t^2+2t)(1+t)-(-t^3+t^2)}{(1+t)^2} \quad \cdots(*)$$
$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{t(t^2+t-1)}{(1+t)^2}.$$

ここで，$t^2+t-1=0$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0,\quad 0<\beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$$

をみたし，$S(t)$ の増減は次のようになる．

| $t$ | $(0)$ | | $\beta$ | | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

よって，$S(t)$ を最大にする $t$ の値は

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \qquad \cdots(答)$$

このとき，$\beta^2+\beta-1=0$ であり，$S'(\beta)=0$ と $(*)$ より，

$$(-3\beta^2+2\beta)(1+\beta)=-\beta^3+\beta^2$$

であるから，最大値は，

$$S(\beta)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\beta^3+\beta^2}{1+\beta}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot(-3\beta^2+2\beta)$$
$$=\frac{2}{3}\{-3(\beta^2+\beta-1)+5\beta-3\}$$
$$=\frac{2}{3}\left(5\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-3\right)$$
$$=\frac{-11+5\sqrt{5}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

**2**

$OA=OB=OC=1$,

$\angle AOB=\angle AOC=90^\circ$, $\angle BOC=60^\circ$ より,

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}.\end{array}\right\}\cdots ①$$

(1) 4点 A, D, E, P は同一平面上にあるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AE}\\&=-(\alpha+\beta)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OD}+\beta\overrightarrow{OE}\\&=-(\alpha+\beta)\vec{a}+\alpha t\vec{b}+\beta(2t+1)\vec{c}\end{aligned}\quad\cdots ②$$

となる実数 $\alpha$, $\beta$ がある.

$$\overrightarrow{OP}=(1-\alpha-\beta)\vec{a}+\alpha t\vec{b}+\beta(2t+1)\vec{c}$$

であり,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=-1,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=1$$

より

$$\begin{cases}(1-\alpha-\beta)|\vec{a}|^2+\alpha t\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta(2t+1)\vec{a}\cdot\vec{c}=-1,\\(1-\alpha-\beta)\vec{a}\cdot\vec{b}+\alpha t|\vec{b}|^2+\beta(2t+1)\vec{b}\cdot\vec{c}=1.\end{cases}$$

①を代入すると,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2,\\(\alpha+\beta)t+\frac{1}{2}\beta=1,\end{cases}\text{すなわち}\begin{cases}\alpha=4t,\\ \beta=2-4t.\end{cases}$$

②に代入すると,

$$\overrightarrow{AP}=-2\vec{a}+4t^2\vec{b}+2(1-4t^2)\vec{c}.$$

…(答)

(2) $4t^2=u$ とおくと, $t>0$ のとき $u>0$ であり

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2&=\left|-2\vec{a}+u\vec{b}+2(1-u)\vec{c}\right|^2\\&=4|\vec{a}|^2+u^2|\vec{b}|^2+4(1-u)^2|\vec{c}|^2\\&\quad+2\{-2u\vec{a}\cdot\vec{b}+2u(1-u)\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\quad-4(1-u)\vec{c}\cdot\vec{a}\}.\end{aligned}$$

①を代入すると,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2&=4+u^2+4(1-u)^2+2u(1-u)\\&=3u^2-6u+8\\&=3(u-1)^2+5.\end{aligned}$$

これは $u=4t^2=1$ のとき最小となるので, $t>0$ より $|\overrightarrow{AP}|$ を最小にする $t$ の値は

$$\frac{1}{2}\ \cdots(答)$$

であり, $|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は

$$\sqrt{5}.\ \cdots(答)$$

$\boxed{3}$

(1) $z=x+yi$（$x, y$ は実数）と表示すると

$$f(z)=\frac{(1-ai)(x+yi)+(1+ai)(x-yi)}{2}$$
$$=\frac{2x+2ay}{2}$$
$$=x+ay$$

これより，$f(z)$ は実数である．

（証明終り）

(2) $f(z)=x+ay$，$f(i)=a$ より，

等式

$$f(z)\{f(z)-f(i)-2\}=-2f(i)$$

を変形すると

$$\{f(z)\}^2-(a+2)\{f(z)\}+2a=0.$$
$$\{f(z)-a\}\{f(z)-2\}=0$$
$$f(z)=a \text{ または } f(z)=2$$
$$x+ay=a \text{ または } x+ay=2 \quad \cdots ①$$

一方，$|z|=1$ を変形すると

$$x^2+y^2=1 \quad \cdots ②$$

これより，$N(a)$ は2つの図形

$A$：①の表す2直線の和集合

$B$：円②

の共有点の個数に一致する．

直線 $x+ay=a$ と円②の中心$(0,0)$との距離 $d_1$ は円②の半径1とくらべて

$$d_1=\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}<1$$

であり，直線 $x+ay=2$ と円②の中心との距離 $d_2$ は円②の半径1とくらべて

$$d_2=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\begin{cases}=1 & (a^2=3)\\ >1 & (a^2<3)\\ <1 & (a^2>3)\end{cases}$$

である．また，2直線は平行であり，とくに $a=2$ のときそれらは一致する．

以上より，次表を得る．

| $a$の条件 | 直線 $x+ay=a$ と円②の共有点 | 直線 $x+ay=2$ と円②の共有点 | 重複分 | $N(a)$ |
|---|---|---|---|---|
| $a^2=3$ | 2コ | 1コ | 0コ | 3 |
| $a^2<3$ | 2コ | 0コ | 0コ | 2 |
| $\begin{cases}a^2>3\\ a\neq 2\end{cases}$ | 2コ | 2コ | 0コ | 4 |
| $a=2$ | 2コ | 2コ | 2コ | 2 |

まとめると

$$N(a)=\begin{cases}2 & (-\sqrt{3}<a<\sqrt{3},\ a=2),\\ 3 & (a=\pm\sqrt{3}),\\ 4 & (a<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<a<2,\ 2<a).\end{cases}$$

…（答）

## 4

(1)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，

$0 < e^{-x} \leqq 1$，$0 \leqq \cos x \leqq 1$

であるから，$f(x) \leqq 1$ が成り立つ．

$g(x) = f(x) - (1-x)$ とおく．

$g'(x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + 1$，

$g''(x) = 2e^{-x}\sin x$．

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において，$g''(x) > 0$，

$g'(0) = 0$ より，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で

$g'(x) > 0$ である．さらに，

$g(0) = 0$ より，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で

$g(x) \geqq 0$ が成り立つ．

以上により，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，

$1 - x \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つ．

（証明終り）

(2)　(1)より，$0 \leqq x \leqq a$ において，

$$\frac{(x+a)(1-x)}{x^2+a^2} \leqq \frac{(x+a)f(x)}{x^2+a^2} \leqq \frac{x+a}{x^2+a^2} \quad \cdots(*)$$

が成り立つ．

$$\frac{(x+a)(1-x)}{x^2+a^2} = \frac{x+a}{x^2+a^2} - 1 + \frac{a(a-x)}{x^2+a^2}$$

より，

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = P(a),\quad \int_0^a \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = Q(a)$$

とおくと，(*)の$[0, a]$での定積分を考え，

$$P(a) + Q(a) - a + a\{Q(a) - P(a)\} \leqq I(a) \leqq P(a) + Q(a).$$

ここで，

$$P(a) = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+a^2)\Big]_0^a = \frac{1}{2}\log 2.$$

$Q(a)$ について，$x = a\tan\theta$ とおくと，$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$x : 0 \to a$ のとき $\theta : 0 \to \frac{\pi}{4}$，

$dx = \frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$，$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}$

より，

$$Q(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

したがって，

$$\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} + a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - 1\right) \leqq I(a) \leqq \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{a \to +0}\left\{\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} + a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{a \to +0}\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}$$

より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{a \to +0} I(a) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} \quad \cdots(答)$$

5

目の出方は，$6^3=216$ 通り．

$a,b,c$ を大きくない順に，$p,q,m$ とする．

(1) $a=b=c$ のとき，

$x=\dfrac{(3a)^2}{3a^3}=\dfrac{3}{a}$ が整数であるとき，$a=1,3$．

目の出方は 2 通りであるので，求める確率は，

$\dfrac{2}{216}=\dfrac{1}{108}$ ．…(答)

(2) $m=6$ のとき，

$x=\dfrac{(p+q+6)^2}{3\cdot pq\cdot 6}=\dfrac{(p+q+6)^2}{2\cdot 3^2\cdot pq}$

が整数であるとき，$p+q+6$ が 6 の倍数．つまり，$p+q$ が 6 の倍数．

(i) $p+q=6$ のとき，

$x=\dfrac{12^2}{18pq}=\dfrac{8}{pq}$ が整数となるのは，

$(p,q)=(2,4)$．

(ii) $p+q=12$ のとき，$(p,q)=(6,6)$．

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり不適．

(i),(ii)より，条件を満たすのは，

$(p,q,m)=(2,4,6)$

の場合であり，目の出方は，$3!=6$ 通り．

したがって，求める確率は，$\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$ ．…(答)

(3) $m=k$ $(k=2,4,6)$ となる目の出方の総数は，3回とも $k$ 以下の目が出る目の出方の総数から，3回とも $(k-1)$ 以下の目が出る目の出方の総数を除いて，

$k^3-(k-1)^3$ 通り．

したがって，$m$ が偶数である確率は，

$\dfrac{(6^3-5^3)+(4^3-3^3)+(2^3-1^3)}{216}=\dfrac{135}{216}$．

$m=6$ かつ $x$ が整数である目の出方は，(2)より 6 通り．

$m=4$ かつ $x$ が整数である目の出方について，

$x=\dfrac{(p+q+4)^2}{3\cdot pq\cdot 4}=\dfrac{(p+q+4)^2}{2^2\cdot 3\cdot pq}$

が整数となるので，$p+q+4$ は 6 の倍数．つまり，$p+q$ を 6 で割って 2 余る．$1\leqq p\leqq q\leqq 4$ より，

$(p,q)=(1,1),(4,4)$．

$x$ が整数となるものを考えて，

$(p,q,m)=(1,1,4)$．

したがって，目の出方は ${}_3C_1=3$ 通り．

$m=2$ かつ $x$ が整数である目の出方について，

$x=\dfrac{(p+q+2)^2}{2\cdot 3\cdot pq}$

が整数となるので，$p+q+2$ は 6 の倍数．

つまり，$p+q$ を 6 で割って 4 余る．$1\leqq p\leqq q\leqq 2$ より，

$(p,q)=(2,2)$．

このとき，$x=\dfrac{3}{2}$ となり不適．

以上より，$m$ が偶数かつ $x$ が整数である確率は，

$\dfrac{6+3}{216}=\dfrac{9}{216}$．

したがって，求める条件つき確率は，

$\dfrac{\frac{9}{216}}{\frac{135}{216}}=\dfrac{1}{15}$ ．…(答)