1

(1)　$x=a+b\sqrt{n}$ より，

$$(x-a)^2=b^2n.$$
$$x^2-2ax+a^2-b^2n=0.$$

よって，$p$，$q$ の組 $(p,\ q)$ の1つに

$$\left(-2a,\ a^2-b^2n\right)$$

がある．

ここで，有理数 $p$，$q$，$p'$，$q'$ に対して，$x$ が，

$$x^2+px+q=0,\quad x^2+p'x+q'=0$$

を満たすとすると，辺々を引いて，

$$(p-p')x+q-q'=0. \qquad \cdots①$$

$p-p'\neq 0$ のとき，

$$x=-\frac{q-q'}{p-p'}$$

となり，$x$ が無理数であることに反するので，$p-p'=0$ すなわち $p=p'$ であり，このとき①から $q=q'$ となるので，$p$，$q$ の組 $(p,\ q)$ がただ一つあり，題意が示された．　（証明終り）

(2)　$x=a+b\sqrt[3]{n}$ より，

$$(x-a)^3=b^3n.$$
$$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-b^3n=0.$$

よって，$p$，$q$，$r$ の組 $(p,\ q,\ r)$ の1つに

$$\left(-3a,\ 3a^2,\ -a^3-b^3n\right) \qquad \cdots②$$

がある．

ここで，有理数 $p$，$q$，$r$，$p'$，$q'$，$r'$ に対して，$x$ が，

$$x^3+px^2+qx+r=0,\quad x^3+p'x^2+q'x+r'=0$$

を満たすとすると，辺々引いて，

$$(p-p')x^2+(q-q')x+r-r'=0. \qquad \cdots③$$

ここで，$p-p'\neq 0$ のとき，

$$p''=\frac{q-q'}{p-p'},\quad q''=\frac{r-r'}{p-p'}$$

とおくと，$p''$，$q''$ は有理数であり，$x$ は

$$x^2+p''x+q''=0$$

を満たす．

ここで，$X$ の多項式 $X^3+pX^2+qX+r$，　$X^2+p''X+q''$ に対し，

© 河合塾　2026 年

$\boxed{1}$（つづき１）

$$X^3 + pX^2 + qX + r = (X^2 + p''X + q'')(X + s) + tX + u \qquad \cdots ④$$

を満たす有理数 $s$, $t$, $u$ があり，$X = x$ とすると，

$$tx + u = 0.$$

このとき，(1) と同様にして，$t = u = 0$ であるから，④より，

$$X^3 + pX^2 + qX + r = (X^2 + p''X + q'')(X + s).$$

よって，$-s$ は $X$ の方程式

$$X^3 + pX^2 + qX + r = 0 \qquad \cdots ⑤$$

の解であり，②のとき，⑤は，

$$(X - a)^3 = b^3 n \qquad \cdots ⑥$$

となるので，$-s$ は⑥の解であるが，⑥は実数解を $x$ しかもたないので，$-s$ が有理数であることに反する．

よって，$p - p' = 0$ すなわち $p = p'$ であり，このとき，③から，

$$(q - q')x + r - r' = 0$$

となり，(1) と同様にして，

$$q = q', \quad r = r'$$

を得るから，題意が示された．　　(証明終り)

© 河合塾　2026 年

$\boxed{1}$（つづき２）

((2) の別解 1)

$x = a + b\sqrt[3]{n}$ のとき，$x - a = \sqrt[3]{n}$ の両辺を３乗して整理すると，

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - b^3n = 0 \qquad \cdots①$$

が成り立つ．ここで，$p = -2a$，$q = 3a^2$，$r = -a^3 - b^3n$ とおくと，$p$，$q$，$r$ は有理数であり，①は，

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad \cdots②$$

と表せる．よって，求める有理数 $p$，$q$，$r$ の１つに，

$$p = -2a,\ q = 3a^2,\ r = -a^3 - b^3n. \qquad \cdots(答)$$

がある．

次に，有理数 $p_1$，$p_2$，$q_1$，$q_2$，$r_1$，$r_2$ に対して，２式

$$x^3 + p_1x^2 + q_1x + r_1 = 0,$$

$$x^3 + p_2x^2 + q_2x + r_2 = 0$$

が成り立つとする．辺々の差をとって，

$$(p_1 - p_2)x^2 + (q_1 - q_2)x + r_1 - r_2 = 0. \qquad \cdots③$$

ここで $p_1 \neq p_2$ と仮定し，$s = \dfrac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$，$t = \dfrac{r_1 - r_2}{p_1 - p_2}$ とおくと，$s$，$t$ は有理数であり，

$$x^2 + sx + t = 0. \qquad \cdots④$$

よって，

$$x = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \quad (x \text{ は無理数より，} s^2 - 4t > 0\text{，} \sqrt{s^2 - 4t} \text{ は無理数})$$

であり，これが $x = a + b\sqrt[3]{n}$ と等しいから，

$$a + b\sqrt[3]{n} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4t}}{2}.$$

$x$ は無理数であるから $b \neq 0$ であり，このとき，

$$\sqrt[3]{n} = \frac{-2a - s \pm \sqrt{s^2 - 4t}}{2b}.$$

ここで，$E = \dfrac{-2a - s}{2b}$，$F = \pm\dfrac{1}{2b}$，$G = s^2 - 4t$ とおくと，$E$，$F$，$G$ は有理数であり，

$$\sqrt[3]{n} = E + F\sqrt{G} \quad (\ F \neq 0,\ G > 0,\ \sqrt{G} \text{ は無理数})$$

と表せる．両辺を３乗して整理すると，

$$F(3E^2 + F^2G)\sqrt{G} + E^3 + 3EF^2G - n = 0. \qquad \cdots⑤$$

$\sqrt{G}$ は無理数であるから，(1) と同様にして，

$$F(3E^2 + F^2G) = 0 \text{ かつ } E^3 + 3EF^2G - n = 0$$

であるが，$F \neq 0$ と $E^2 \geqq 0$，$F^2 > 0$，$G > 0$ より，$F(3E^2 + F^2G) \neq 0$ であるから，⑤ を満たす有理数 $E$，$F$，$G$ は存在しない．よって，$p_1 = p_2$ である．

(以下，解答と同様)

© 河合塾　2026 年

1（つづき３）

((2) の別解 2)

一般に,

命題 (♯)「$u$, $v$ が有理数, $\alpha$ が無理数のとき, $u\alpha+v=0$ ならば $u=v=0$」

が成り立つ. なぜなら, $u\neq0$ とすると $\alpha=-\dfrac{v}{u}$ となるから, $\alpha$ が有理数となり不適. これより $u=0$ であり, このとき $v=0$ となるからである.

また, 無理数 $x=a+b\sqrt[3]{n}$ について,

命題 (♭)「$u$, $v$, $t$ を有理数とするとき, $ux^2+vx+t=0$ ならば $u=v=t=0$」

が成り立つ. 理由は次の通りである.

$x=a+b\sqrt[3]{n}$ を $ux^2+vx+t=0$ に代入すると,

$$u(a+b\sqrt[3]{n})^2+v(a+b\sqrt[3]{n})+t=0$$

すなわち,

$$ub^2(\sqrt[3]{n})^2+b(2ua+v)\sqrt[3]{n}+ua^2+va+t=0$$

となる. $K=ub^2$, $L=b(2ua+v)$, $M=ua^2+va+t$ とおくと $K$, $L$, $M$ は有理数であり,

$$K(\sqrt[3]{n})^2+L\sqrt[3]{n}+M=0 \qquad \cdots①$$

となる. ①の両辺に $\sqrt[3]{n}$ を掛けると,

$$Kn+L(\sqrt[3]{n})^2+M\sqrt[3]{n}=0 \qquad \cdots②$$

となり, ①$\times L-$②$\times K$ から,

$$(L^2-KM)\sqrt[3]{n}+LM-K^2n=0$$

である. ここで, $x$ が無理数より $\sqrt[3]{n}$ が無理数かつ $b\neq0$ である. また, $K$, $L$, $M$, $n$ は有理数なので, 命題 (♯) より,

$$L^2-KM=0\cdots③ \text{ かつ } LM-K^2n=0\cdots④$$

である.

(i) $L=0$ のとき.

④と $n\neq0$ より $K=0$ である. このとき①から $M=0$ となるので, $K=L=M=0$ である.

(ii) $L\neq0$ のとき.

④より $M=\dfrac{K^2n}{L}$ となるので③に用いると, $L^2-K\cdot\dfrac{K^2n}{L}=0$ すなわち $K^3n=L^3$ となる. $L\neq0$ より $K\neq0$ であるから $n=\left(\dfrac{K}{L}\right)^3$ より $\sqrt[3]{n}=\dfrac{K}{L}$ となるが, これは $\sqrt[3]{n}$ が無理数であることに反する.

(i), (ii) より, $K=L=M=0$ であるから,

$$ub^2=0,\ b(2ua+v)=0,\ ua^2+va+t=0$$

である. $b\neq0$ より, 第 1, 2, 3 式から順に $u=0$, $v=0$, $t=0$ となる. よって, 命題 (♭) が成り立つ.

© 河合塾　2026 年

$\boxed{1}$（つづき４）

$x=a+b\sqrt[3]{n}$ より $b\sqrt[3]{n}=x-a$ なので，両辺３乗して，

$$b^3n=(x-a)^3 \text{ すなわち } x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-b^3n=0$$

である．$x$ が $x^3+px^2+qx+r=0$ も満たすとき，辺々引くと，

$$(-3a-p)x^2+(3a^2-q)x-a^3-b^3b-r=0$$

である．$a$，$b$，$p$，$q$，$r$ は有理数，$x$ は無理数なので，命題 (b) を用いると，

$$p=-3a,\quad q=3a^2,\quad r=-a^3-b^3n \qquad \cdots(\text{答})$$

となり，有理数 $p$，$q$，$r$ の組はただ一つに定まる．　(証明終り)

© 河合塾　2026 年

$\boxed{2}$

(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} - {}_n\mathrm{C}_r &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} - \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!\{(n-r)+r-n\}}{r!(n-r)!} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるから ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ が成り立つ．

また，この式より ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_n\mathrm{C}_r - {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ であるから，$n-1 \to k$, $r-1 \to r$ と置き換えることにより ${}_k\mathrm{C}_r = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_k\mathrm{C}_{r+1}$ となる．${}_r\mathrm{C}_{r+1} = 0$ と定めるとこの式は $0 \leqq r \leqq k$ で成り立つから，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r &= \sum_{k=r}^{n} ({}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_k\mathrm{C}_{r+1}) \\
&= ({}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} + {}_{r+2}\mathrm{C}_{r+1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{r+1} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}) \\
&\quad - ({}_r\mathrm{C}_{r+1} + {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r+1} + {}_n\mathrm{C}_{r+1}) \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_r\mathrm{C}_{r+1} \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}
\end{aligned}
$$

となる．よって，${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r$ が成り立つ．

（証明終り）

【参考 1】

${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r$ であることは，$n$ についての数学的帰納法を使って証明することもできる．

【参考 2】

${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ は，「1 以上 $(n+1)$ 以下の異なる $(n+1)$ 個の整数の中から，異なる $(r+1)$ 個の整数を選ぶ場合の数」である．この場合の数を，選んだ $(r+1)$ 個の整数の最大値で場合分けして数える．最大値が $k+1$ $(r \leqq k \leqq n)$ のとき，残りの $r$ 個の整数は，1 以上 $k$ 以下の異なる $k$ 個の整数の中から異なる $r$ 個の整数を選ぶことになるので ${}_k\mathrm{C}_r$ 通りある．したがって，${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r$ が成り立つ．

(2)　$x+y=k$ $(2 \leqq k \leqq n-2)$ と固定したとき，$x, y$ の組 $(x, y)$ は，$(x,y) = (1, k-1), (2, k-2), \cdots, (k-1, 1)$ であるからその個数は $k-1$ である．このとき，$z$ は $z < n-k$ を満たす正の整数なので，$z$ の個数は $n-k-1$ である．よって，$x+y=k$ $(2 \leqq k \leqq n-2)$ と固定したときの点 $(x, y, z)$ の個数は $(k-1)(n-k-1)$ となるので，求める点 $(x, y, z)$ の個数を $S(n)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)(n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-2} \{-k^2 + nk - (n-1)\} \\
&= -\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) + n \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-1) - (n-1)(n-2) \\
&= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \qquad \cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

© 河合塾　2026 年

$\boxed{2}$（つづき１）

である．

【参考 1】

$x+y+z=k\ (3 \leqq k \leqq n-1)$ と固定する．これを満たす点 $(x, y, z)$ は，$k$ 個の ◯ を横一列に並べ，それらの隙間である $(k-1)$ か所から 2 か所選んで仕切りを入れ，仕切りで分けられた 3 か所の ◯ の個数を左から順に $x, y, z$ の値とすることにより，仕切りの入れ方と 1 対 1 に対応するから ${}_{k-1}\mathrm{C}_2$ 個ある．したがって，(1) で示したことを用いると，

$$S(n)=\sum_{k=3}^{n-1} {}_{k-1}\mathrm{C}_2=\sum_{r=2}^{n-2} {}_{r}\mathrm{C}_2={}_{n-1}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

となる．

【参考 2】

正の整数 $w$ を $w=n-(x+y+z)$ と定めると，$x+y+z+w=n$ を満たす $x, y, z, w$ の組と点 $(x, y, z)$ は 1 対 1 に対応する．$x, y, z, w$ の組は，$n$ 個の ◯ を横一列に並べ，それらの隙間である $(n-1)$ か所から 3 か所選んで仕切りを入れ，仕切りで分けられた 4 か所の ◯ の個数を左から順に $x, y, z, w$ の値とすることにより，仕切りの入れ方と 1 対 1 に対応する．したがって，

$$S(n)={}_{n-1}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

である．

(3)　$x+y+z=3n$ かつ $x<y<z$ より $z$ を消去すると，

$$x<y<3n-(x+y)$$

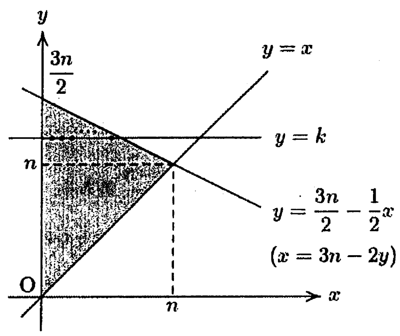
すなわち，

$$x<y<\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}x$$

となる．これを満たす点 $(x, y)$ と点 $(x, y, z)$ は 1 対 1 に対応するので，これを満たす点 $(x, y)$ の個数 ($T(n)$ とする) を数える．

$n$ が偶数のとき，

$$\begin{aligned} T(n)&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)+\sum_{k=n+1}^{\frac{3n}{2}-1}(3n-2k-1) \\ &=\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}(n-2)\left(\frac{n}{2}-1\right) \\ &=\frac{1}{4}\left(3n^2-6n+4\right) \end{aligned}$$




である．

© 河合塾　2026 年

$\boxed{2}$（つづき２）

$n$ が奇数のとき，

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n}(k-1)+\sum_{k=n+1}^{\frac{3n-1}{2}}(3n-2k-1)$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}(n-3)\cdot\frac{n-1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}(n-1)^2$$

である．

以上より，

$$T(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(3n^2-6n+4) & (n\text{ が偶数のとき})\\ \dfrac{3}{4}(n-1)^2 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}\qquad\cdots(答)$$

である．

【参考】

まず，$x<y<z$ という条件を外して，$x+y+z=3n$ を満たす点 $(x,y,z)$ の個数を数える．これを満たす点 $(x,y,z)$ は，$3n$ 個の○を横一列に並べ，それらの隙間である $(3n-1)$ か所から２か所選んで仕切りを入れ，仕切りで分けられた３か所の○の個数を左から順に $x$，$y$，$z$ の値とすることにより，仕切りの入れ方と１対１に対応するから ${}_{3n-1}\mathrm{C}_2$ 個ある．この ${}_{3n-1}\mathrm{C}_2$ 個の中には，次の (i)〜(iii) のタイプがある．

(i)　$x$，$y$，$z$ がすべて等しいもの．

(ii)　$x$，$y$，$z$ のうちの２つだけが等しいもの．

(iii)　$x$，$y$，$z$ がいずれも相異なるもの．

(i) のタイプは，$(x,y,z)=(n,n,n)$ の１個である．

(ii) のタイプで，$x=y\neq z$ となるものを数える．

- $n$ が偶数のときは，

$$(x,y,z)=(1,1,3n-2),\cdots,(n-1,n-1,n+2),(n+1,n+1,n-2),\cdots,\left(\frac{3n-2}{2},\frac{3n-2}{2},2\right)$$

　であるから $\dfrac{3n-4}{2}$ 個ある．($(x,y,z)=(n,n,n)$ が抜けていることに注意．)

- $n$ が奇数のときは，

$$(x,y,z)=(1,1,3n-2),\cdots,(n-1,n-1,n+2),(n+1,n+1,n-2),\cdots,\left(\frac{3n-1}{2},\frac{3n-1}{2},1\right)$$

　であるから $\dfrac{3n-3}{2}$ 個ある．($(x,y,z)=(n,n,n)$ が抜けていることに注意．)

$y=z\neq x$ や $z=x\neq y$ となるものも同様であるから，(ii) のタイプは，

$n$ が奇数のときは $\dfrac{3(3n-3)}{2}$ 個，$n$ が偶数のときは $\dfrac{3(3n-4)}{2}$ 個

となる．

(iii) のタイプで，$x<y<z$ となるものが求める個数である．この個数を $T(n)$ とする．$x<y<z$ 以外のものもそれぞれ $T(n)$ 個ずつあるから，(iii) のタイプは $3!\times T(n)$ 個となる．

© 河合塾　2026 年

$\boxed{2}$（つづき３）

(i)〜(iii) のタイプの個数の合計が ${}_{3n-1}\mathrm{C}_2$ であるから，

$$\begin{cases} n\text{ が偶数のときは，}\ T(n)=\dfrac{1}{3!}\left\{{}_{3n-1}\mathrm{C}_2-1-\dfrac{3(3n-4)}{2}\right\}, \\ n\text{ が奇数のときは，}\ T(n)=\dfrac{1}{3!}\left\{{}_{3n-1}\mathrm{C}_2-1-\dfrac{3(3n-3)}{2}\right\} \end{cases}$$

である．よって，

$$T(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(3n^2-6n+4\right) & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3}{4}(n-1)^2 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

となる．

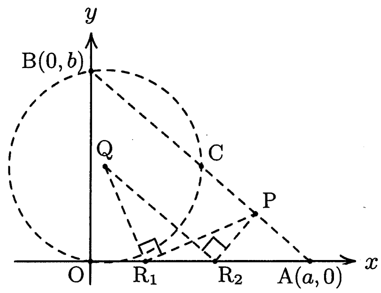
© 河合塾　2026 年

$\boxed{3}$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ より $\mathrm{C}\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ である．また，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{3a}{4},\frac{b}{4}\right) \qquad \cdots(答)$$




である．さらに，線分 OB の垂直二等分線 $y=\dfrac{b}{2}$ と，線分 OC の垂直二等分線 $x^2+y^2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2$ との交点が Q であるから，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{a^2-b^2}{4a},\frac{b}{2}\right) \qquad \cdots(答)$$

である．

(2)　2 点 O, A を通る直線上の点 R は $\mathrm{R}(r,0)$ と表せて，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\dfrac{3a}{4}-r,\dfrac{b}{4}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\dfrac{a^2-b^2}{4a}-r,\dfrac{b}{2}\right)$ となる．$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\neq\vec{0}$ より条件 $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$ であるから，

$$\left(\frac{3a}{4}-r\right)\left(\frac{a^2-b^2}{4a}-r\right)+\frac{b}{4}\cdot\frac{b}{2}=0$$
$$16ar^2+4\left(b^2-4a^2\right)r+a\left(3a^2-b^2\right)=0$$
$$(4r-a)\left(4ar-3a^2+b^2\right)=0$$
$$r=\frac{a}{4},\ \frac{3a^2-b^2}{4a}$$

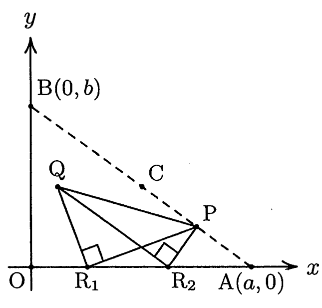
となる．したがって，求める R は 2 点あり，

$$\left(\frac{a}{4},0\right),\quad \left(\frac{3a^2-b^2}{4a},0\right) \qquad \cdots(答)$$

である．

(3)　$\mathrm{R_1}\left(\dfrac{a}{4},0\right)$, $\mathrm{R_2}\left(\dfrac{3a^2-b^2}{4a},0\right)$ とすると，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{R_1P}}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(2a,b),\\[2mm] \overrightarrow{\mathrm{R_1Q}}=\left(-\dfrac{b^2}{4a},\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{b}{4a}(-b,2a)\end{cases}\qquad \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{R_2P}}=\left(\dfrac{b^2}{4a},\dfrac{b}{4}\right)=\dfrac{b}{4a}(b,a),\\[2mm] \overrightarrow{\mathrm{R_2Q}}=\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(-a,b)\end{cases}$$




であるから，

$$\frac{\mathrm{R_1Q}}{\mathrm{R_1P}}=\frac{b}{a},\quad \frac{\mathrm{R_2Q}}{\mathrm{R_2P}}=\frac{2a}{b}$$

となる．

© 河合塾　2026 年

$\boxed{3}$（つづき）

$$\triangle\mathrm{PQR} \backsim \triangle\mathrm{ABO},\quad \triangle\mathrm{QPR} \backsim \triangle\mathrm{ABO}$$

となる条件はそれぞれ，

$$\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}},\quad \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$$

つまり，

$$\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RP}} = \frac{b}{a} \quad \text{または} \quad \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RP}} = \frac{a}{b}$$

である．

(i)　$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ のとき．

$\triangle\mathrm{PQR} \backsim \triangle\mathrm{ABO}$ が成り立つ．

(ii)　$\mathrm{R} = \mathrm{R}_2$ のとき．

$\dfrac{2a}{b} \neq \dfrac{a}{b}$ であるから $\triangle\mathrm{QPR} \backsim \triangle\mathrm{ABO}$ は成り立たない．また，$\triangle\mathrm{PQR} \backsim \triangle\mathrm{ABO}$ となる条件は，$\dfrac{2a}{b} = \dfrac{b}{a}$ すなわち $b = \sqrt{2}a$ となることである．このときは $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$ となる．

以上 (i),(ii) より，求める R は，

$$\left(\frac{a}{4}, 0\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

© 河合塾　2026 年

$\boxed{4}$

$$e(\theta)e(\varphi)=e(\theta+\varphi),\quad \overline{e(\theta)}=e(-\theta),\quad \{e(\theta)\}^n=e(n\theta)$$

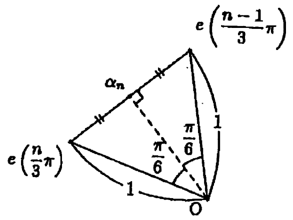
等が成り立つ．また，$e(\theta)$ をかけると，原点中心の $\theta$ 回転になる． 以下，この規則を適宜使用して式変形を行う．

$e\left(\dfrac{n-1}{3}\pi\right)$ と $e\left(\dfrac{n}{3}\pi\right)$ の中点を $\mathrm{A}(\alpha_n)$ とすると，図より，

$$\arg\alpha_n=\frac{\frac{n-1}{3}\pi+\frac{n}{3}\pi}{2}=\frac{2n-1}{6}\pi,\ |\alpha_n|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，

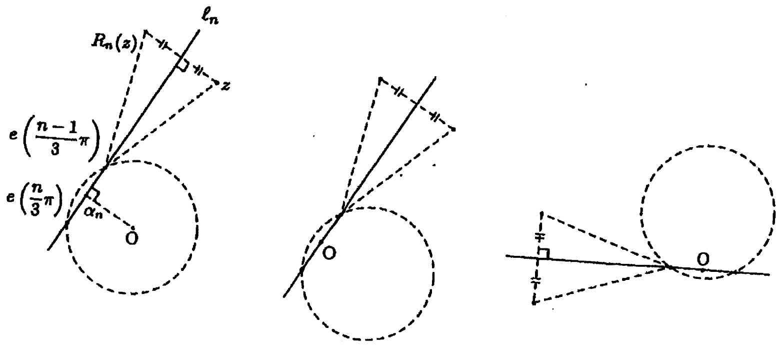
$$\alpha_n=\frac{\sqrt{3}}{2}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$




直線 $\ell_n$ は A を通り，直線OAと垂直であるから，$\ell_n$ を

$-\alpha_n$ 平行移動して原点中心に $-\dfrac{2n-1}{6}\pi-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{n+1}{3}\pi$ 回転

すると実軸に一致する．




よって，$z$ と $R_n(z)$ に同じ移動をほどこした点は互いに共役である．したがって，

$$(R_n(z)-\alpha_n)\,e\left(-\frac{n+1}{3}\pi\right)=\overline{(z-\alpha_n)\,e\left(-\frac{n+1}{3}\pi\right)}$$

$$=(\overline{z}-\overline{\alpha_n})\,e\left(\frac{n+1}{3}\pi\right)$$

両辺に $e\left(\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$ をかけて，

$$R_n(z)-\alpha_n=(\overline{z}-\overline{\alpha_n})\,e\left(\frac{n+1}{3}\pi\right)e\left(\frac{n+1}{3}\pi\right)=(\overline{z}-\overline{\alpha_n})\,e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)$$

$$R_n(z)=(\overline{z}-\overline{\alpha_n})\,e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)+\alpha_n$$

© 河合塾　2026 年

$\boxed{4}$（つづき１）

$$= e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\overline{z} - e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\overline{\alpha_n} + \alpha_n$$

ここで，

$$-e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\overline{\alpha_n} + \alpha_n = -e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\frac{\sqrt{3}}{2}e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{-e\left(\frac{2n+5}{6}\pi\right) + e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right) + e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)\right\} \quad (e(-\pi) = -1 \text{ なので})$$

$$= \sqrt{3}\, e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$

となるので，

$$R_n(z) = e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\overline{z} + \sqrt{3}\, e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$

よって，

$$\theta_1 = \frac{2n+2}{3}\pi, \quad \theta_2 = \frac{2n-1}{6}\pi \qquad \cdots \text{（答）}$$

（注：$\theta_1$，$\theta_2$ は，他にも適する値はあるが，一意性が本問では問われていないのでこれを答にする．）

(2) (1)の結果より，

$$z_{n+1} = e\left(\frac{2(n+1)}{3}\pi\right)\overline{z_n} + \sqrt{3}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$

よって，

$$z_{n+2} = e\left(\frac{2(n+2)}{3}\pi\right)\overline{z_{n+1}} + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right)$$

$$= e\left(\frac{2(n+2)}{3}\pi\right)\left\{e\left(-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right)z_n + \sqrt{3}e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right)\right\} + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right)$$

$$= e\left(\frac{2}{3}\pi\right)z_n + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+9}{6}\pi\right) + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right)$$

$$= e\left(\frac{2}{3}\pi\right)z_n + \sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

（ここで，$e\left(\frac{3}{2}\pi\right) + e\left(\frac{\pi}{6}\right) = -i + \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e\left(-\frac{\pi}{6}\right)$）

$$= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n + \sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

つまり，

© 河合塾　2026 年

$\boxed{4}$（つづき２）

$$z_{n+2}=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n+\sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

両辺を $\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}$ で割ると，

$$\frac{z_{n+2}}{e\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+2}}=\frac{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n}{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}}+\sqrt{3}\frac{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}}$$

$$\frac{z_{n+2}}{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}}=\frac{z_n}{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}}+\sqrt{3}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$$

(i) $n$ が奇数のとき

$$\frac{z_n}{\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}}=\frac{z_1}{e\left(\frac{\pi}{3}\right)}+\sqrt{3}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\frac{n-1}{2}$$

$$\begin{aligned}z_n&=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}z_1+\sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\frac{n-1}{2}\\&=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}z_1+\sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}e\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{n-1}{2}\\&=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}\left(z_1-\sqrt{3}\cdot\frac{n-1}{2}i\right)\\&=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}\left(a+bi-\frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i\right)\quad\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

(ii) $n$ が偶数のとき

$z_{n-1}$ には(i)の結果が適用できて，

$$\begin{aligned}z_n&=e\left(\frac{2n}{3}\pi\right)\overline{z_{n-1}}+\sqrt{3}e\left(\frac{2n-3}{6}\pi\right)\\&=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{2n}\left\{e\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-2}\left(a-bi+\sqrt{3}\cdot\frac{n-2}{2}i\right)+\sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}e\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}\left(a-bi+\sqrt{3}\cdot\frac{n-2}{2}i\right)+\sqrt{3}\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2}e\left(-\frac{7}{6}\pi\right)\\&=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+2}\left(a-bi-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i\right)\quad\cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

© 河合塾　2026 年

$\boxed{4}$（つづき３）

**【(1)の部分的別解】**

直線 $\ell_n$ は，$A(\alpha_n)$を通り，直線OAに垂直な直線であり，図のように，

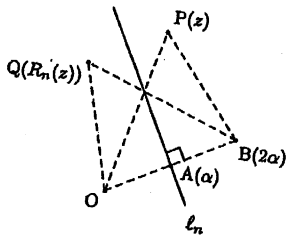
$\triangle BOQ \equiv \triangle OBP$　（ただし，鏡像の関係で合同）

であるから，

$$\frac{R_n(z)-2\alpha_n}{0-2\alpha_n}=\overline{\left(\frac{z}{2\alpha_n}\right)}$$

よって，

$$R_n(z)=-\frac{\alpha_n}{\overline{\alpha_n}}\overline{z}+2\alpha_n \qquad \text{（以下略）}$$




**【(1)の別解２】**

$R_n(z)$ を点Q，$z$ を点P，$\alpha_n$ を点Aとする．

線分QPの中点が直線 $\ell_n$ 上にあるので，$\dfrac{\frac{R_n(z)+z}{2}-\alpha_n}{\alpha_n}=\dfrac{\frac{R_n(z)+z}{2}}{\alpha_n}-1$ が純虚数または 0.

よって，

$$\frac{R_n(z)+z}{\alpha_n}+\frac{\overline{R_n(z)+z}}{\overline{\alpha_n}}=2$$

$$R_n(z)\overline{\alpha_n}+z\overline{\alpha_n}+\overline{R}\alpha_n+\alpha_n\overline{z}=2\alpha_n\overline{\alpha_n} \qquad \cdots①$$

線分QP が 直線OA と平行であるので，$\dfrac{R_n(z)-z}{\alpha_n}$ が実数.

よって，

$$\frac{R_n(z)-z}{\alpha_n}-\frac{\overline{R_n(z)-z}}{\overline{\alpha_n}}=0$$

$$R_n(z)\overline{\alpha_n}-z\overline{\alpha_n}-\overline{R}\alpha_n+\alpha_n\overline{z}=0 \qquad \cdots②$$

①＋②より，

$$R_n(z)=-\frac{\alpha_n}{\overline{\alpha_n}}\overline{z}+2\alpha_n$$

（以下略）

© 河合塾　2026 年

5

$f(x)=x^k e^{-x}$ とおく．半角公式より，

$$\begin{aligned}\int_0^{100} f(x)\sin^2(nx)\,dx &= \int_0^{100} f(x)\frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)\cos(2nx)\,dx\end{aligned}$$

となる．部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_0^{100} f(x)\cos(2nx)dx &= \left[f(x)\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{100} - \int_0^{100} f'(x)\frac{\sin(2nx)}{2n}dx\\ &= f(100)\frac{\sin(200n)}{2n} - \frac{1}{2n}\int_0^{100} f'(x)\sin(2nx)dx\end{aligned}$$

を得る．ここで，$f(100)$ は定数なので，

$$\begin{aligned}\left|f(100)\frac{\sin(200n)}{2n}\right| &\leqq \frac{f(100)}{2n}\\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty} f(100)\frac{\sin(200n)}{2n} = 0 \qquad \cdots ①$$

である．また，$\displaystyle\int_0^{100} |f'(x)|\,dx$ は定数なので，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2n}\int_0^{100} f'(x)\sin(2nx)dx\right| &\leqq \frac{1}{2n}\int_0^{100} |f'(x)\sin(2nx)|\,dx\\ &\leqq \frac{1}{2n}\int_0^{100} |f'(x)|\,dx\\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{100} f'(x)\sin(2nx)dx = 0 \qquad \cdots ②$$

である．①, ② より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{100} f(x)\cos(2nx)dx = 0.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{100} f(x)\sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)\,dx$$

となる．

$$I_k = \int_0^{100} x^k e^{-x}\,dx \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

とおくと，与式は

$$I_k > 20$$

となる．部分積分により

© 河合塾　2026 年

**5** (つづき)

$$
\begin{aligned}
I_{k+1} &= [-x^{k+1}e^{-x}]_0^{100} - \int_0^{100} \{-(k+1)x^k e^{-x}\}dx \\
&= -\frac{100^{k+1}}{e^{100}} + (k+1)I_k
\end{aligned}
$$

である.

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{100} e^{-x}\,dx \\
&= [-e^{-x}]_0^{100} \\
&= 1 - \frac{1}{e^{100}}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{100}{e^{100}} + I_0 \\
&= 1 - \frac{1+100}{e^{100}}
\end{aligned}
$$

よって, $I_1$ は 1 より小さい.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{100^2}{e^{100}} + 2I_1 \\
&= 2 - \frac{2 + 2\cdot 100 + 100^2}{e^{100}}
\end{aligned}
$$

よって, $I_2$ は 2 より小さい.

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{100^3}{e^{100}} + 3I_2 \\
&= 6 - \frac{6 + 6\cdot 100 + 3\cdot 100^2 + 100^3}{e^{100}}
\end{aligned}
$$

よって, $I_3$ は 6 より小さい.

$$
e^{10} > 2^{10} = 1024 > 10^3
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{100^4}{e^{100}} + 4I_3 \\
&= 24 - \frac{24 + 24\cdot 100 + 12\cdot 100^2 + 4\cdot 100^3 + 100^4}{e^{100}} \\
&> 24 - \frac{24 + 24\cdot 100 + 12\cdot 100^2 + 4\cdot 100^3 + 100^4}{10^{30}} \\
&> 24 - \frac{5\cdot 100^4}{10^{30}}
\end{aligned}
$$

よって, $I_4$ は 23 より大きいので, 20 より大きい. ゆえに, 求める最小値は,

$$
k = 4 \qquad \cdots \text{(答)}
$$

© 河合塾　2026 年