1

$AA' = m$ とおく.

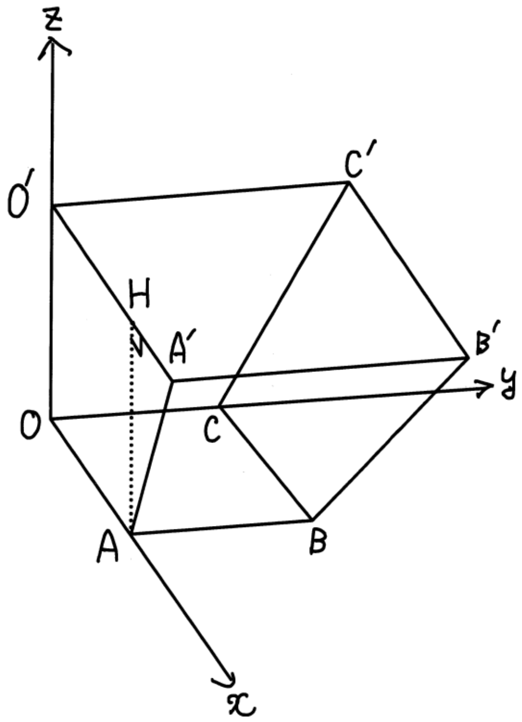
$AA' = \sqrt{(b-a)^2 + (h-0)^2}$.

$\therefore\ m^2 = (b-a)^2 + h^2$ ——①

また $OA + AA' = 1$ より

$a + m = 1$ ——②

$m > 0$ より　$0 < a < 1$ である.



(1)　$a = b$ のとき.

①より $m > 0,\ h > 0$ から　$h = m$. ——①′

①′, ②より　$h = 1 - a$ であり

$$V = OA \times OC \times OO' = a^2 h = a^2(1-a)$$

$$\frac{dV}{da} = 2a - 3a^2 = -3a\left(a - \frac{2}{3}\right)$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{da}$		+	0	−	
V		↗	極大	↘	

$a = \frac{2}{3}$ のとき V は極大かつ最大. 最大値 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$　…(答)

(2)　点Aから線分 $O'A'$ に下ろした垂線の足をHとする. $H(a, 0, h)$ である.

$A'H = b - a$ であり　$b - a = \frac{1}{2}AA'$ より

$$\sin\angle A'AH = \frac{A'H}{AA'} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \angle A'AH = \frac{\pi}{6}.$$

よって　$h = AA'\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$.　$\therefore\ m = \frac{2}{\sqrt{3}}h$. ——③

②より　$a + \frac{2}{\sqrt{3}}h = 1$　$\therefore\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)$. ——④

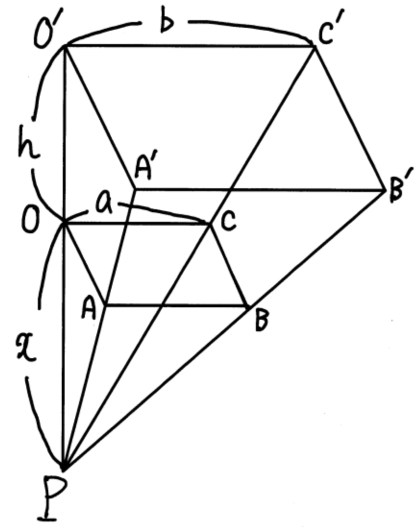
また, $b - a = \frac{1}{2}m$ より②を用いて

$$b - a = \frac{1}{2}(1-a).$$

$$\therefore\ b = \frac{1}{2}(1+a). \text{ ——⑤}$$

1 （つづき1）

$b>a$ のとき，右図のように点 P と x を定める．



$\triangle POC \backsim \triangle PO'C'$

だから，
$$a:b = x:(x+h)$$
$$bx = a(x+h)$$
$$\therefore x = \frac{ah}{b-a}. \quad \text{——⑥}$$

このとき，
$$x+h = \frac{bh}{b-a}. \quad \text{——⑦}$$

$$V = (\text{四角錐}\ PO'A'B'C') - (\text{四角錐}\ POABC)$$
$$= \frac{1}{3}b^2(x+h) - \frac{1}{3}a^2x$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3h}{b-a} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3h}{b-a} \quad (\because ⑥,⑦)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot h\cdot(b^2+ab+a^2).$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)\cdot\left\{\left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + \frac{1+a}{2}\cdot a + a^2\right\} \quad (\because ④,⑤)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(1-a)\cdot\frac{1}{4}(7a^2+4a+1)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{24}(7a^3-3a^2-3a-1)$$
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{24}(21a^2-6a-3)$$
$$= -\frac{7\sqrt{3}}{8}\left(a-\frac{1-2\sqrt{2}}{7}\right)\left(a-\frac{1+2\sqrt{2}}{7}\right)$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

したがって，V が最大となるような a の値は，$a = \frac{1+2\sqrt{2}}{7}$. …(答)

(3)　$k=0$ のときは　$a=b$ であり，(1)の結果から V は最大値を持つ．

$k>0$ に対して　$b-a = km$ ——⑧

①,⑧より　$m^2 = k^2m^2 + h^2$.

$h^2>0$ だから　$k^2<1$ つまり　$0<k<1$ であり，
$$(1-k^2)m^2 = h^2$$
$$\therefore m = \frac{h}{\sqrt{1-k^2}} \quad (\because m>0,\ h>0) \quad \text{——⑨}$$

$\boxed{1}$ (つづき2)

②,⑨より
$$a+\frac{h}{\sqrt{1-k^2}}=1.$$
$$\therefore h=\sqrt{1-k^2}(1-a).$$

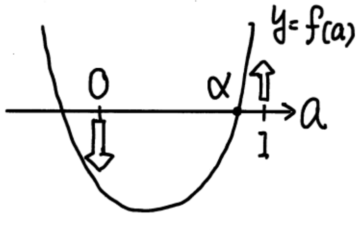
②,⑧より
$$b-a=k(1-a).$$
$$\therefore b=(1-k)a+k.$$

よって
$$\begin{aligned}b^2+ab+b^2&=\{(1-k)a+k\}^2+\{(1-k)a+k\}a+a^2\\&=\{(1-k)^2+(1-k)+1\}a^2+\{2k(1-k)+k\}a+k^2\\&=(k^2-3k+3)a^2+(3k-2k^2)a+k^2.\end{aligned}$$

(2)より
$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot h\cdot(b^2+ab+a^2)\\&=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-k^2}(1-a)\{(k^2-3k+3)a^2+(3k-2k^2)a+k^2\}\\&=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{3}\{(k^2-3k+3)a^3-3(k^2-2k+1)a^2+3(k^2-k)a-k^2\}\end{aligned}$$
$$\frac{dV}{da}=-\sqrt{1-k^2}\{(k^2-3k+3)a^2-2(k^2-2k+1)a+(k^2-k)\}$$

ここで　$f(a)=(k^2-3k+3)a^2-2(k^2-2k+1)a+(k^2-k)$ とおく.

$$k^2-3k+3=\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$
$$f(0)=k(k-1)<0\quad(\because 0<k<1)$$
$$f(1)=1>0$$



故に $y=f(a)$ のグラフは右図のようになる.
つまり方程式 $f(a)=0$ は $0<a<1$ でただ1つの解を持ち，これを α とおく.

$\frac{dV}{da}=-\sqrt{1-k^2}\cdot f(a)$ より，増減表は次のようになる.

a	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

したがって V は $0<a<1$ で最大値を持つ.　　　　(証明終り)

$\boxed{1}$ (つづき3)

注　(2)より

$$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot(b^2+ab+a^2)$$

であるから、(3)では、$b-a$ で約分する前の式を用いてもよい。

$b=(1-k)a+k$, $h=\sqrt{1-k^2}(1-a)$ より

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{1-k^2}(1-a)\cdot\frac{\{(1-k)a+k\}^3-a^3}{k(1-a)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-k^2}}{3k}\left\{(1-k)^3\left(a+\frac{k}{1-k}\right)^3-a^3\right\}.$$

$$\frac{dV}{da}=\frac{\sqrt{1-k^2}}{3k}\left\{3(1-k)^3\left(a+\frac{k}{1-k}\right)^2-3a^2\right\}.$$

ここで $g(a)=3(1-k)^3\left(a+\frac{k}{1-k}\right)^2-3a^2$ とおくと、$3(1-k)^3<3$ であるから、

ay 平面上において、$y=g(a)$ のグラフは上に凸の放物線であり、さらに

$$\begin{cases} g(0)=3(1-k)k^2>0 \\ g(1)=-3k<0 \end{cases}$$

より、$0<a<1$ の範囲に $g(a)=0$ となる a がただ1つ存在する。

これを α とおく。

$\frac{dV}{da}=\frac{\sqrt{1-k^2}}{3k}g(a)$ より、増減表は次のようになる。

a	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって V は $0<a<1$ で最大値を持つ。

$\boxed{2}$　1 から 6 までの自然数を，2 つずつ，次の 3 つの集合に分ける．

$$A = \{1,\ 6\},\quad B = \{2,\ 5\},\quad C = \{3,\ 4\}$$

このとき，条件 (C2) より，数列の項に現れる値は，各集合 A, B, C の要素から高々 1 つずつとなる．よって，数列の項に現れる値は高々 3 種類であることに注意する．

(1)　条件を満たさない数列の総数を引くことを考えると，

$$p_2 = 6^2 - 2\cdot 3 = 30 \quad \cdots(答),\qquad p_3 = 6^3 - (\underbrace{3\cdot 4\cdot 3!}_{3\text{ 種類}} + \underbrace{2\cdot 3\cdot 3}_{2\text{ 種類}}) = 126 \quad \cdots(答)$$

(2)　異なる 2 種類の値の組数は，${}_6\mathrm{C}_2 - 3 = 12$ 通り．例えば，現れる値が 1 と 2 のちょうど 2 種類である数列の総数は $2^n - 2$ 個となるので，

$$q_n = 12(2^n - 2) \quad \cdots(答)$$

(3)　1 種類のみの値が現れる数列の総数は 6 通り．ちょうど 2 種類の値が現れる数列の総数は，(2) で求めた，$q_n = 12(2^n - 2)$ 通り．

ちょうど 3 種類の値が現れる数列の総数を求める．まず，3 種類の値の組は，集合 A, B, C から 1 つずつ選べばよいので，それは $2^3 = 8$ 通り．

例えば，1，2，3 の 3 種類の値が数列の項に現れるとする．このとき，各 a_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は 1，2，3 のいずれかとなるので，それだけを考えると数列の総数は 3^n 通りとなるが，このうち現れる値が 2 種類以下である場合があるので，それを引く．

(ア)　1，2，3 のうち，1 種類のみの値が現れる場合，それは 3 通り

(イ)　1，2，3 のうち，ちょうど 2 種類の値が現れる場合

まず，どの 2 種類となるかで ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りで，1 と 2 のちょうど 2 種類が現れる数列の総数は (2) でも求めた通り，$2^n - 2$ 通りなので，(イ) の総数は $3(2^n - 2)$ 個．

よって，数列の項に 1，2，3 の 3 種類の値が現れる数列の総数は

$$3^n - \{3(2^n - 2) + 3\} = 3^n - 3\cdot 2^n + 3 \text{ 個}$$

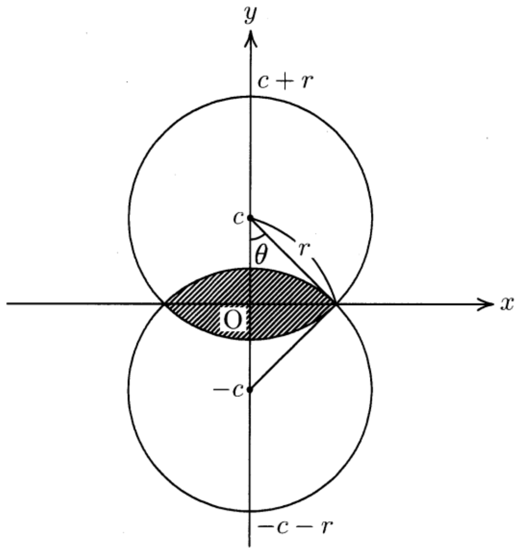
となり，ちょうど 3 種類の値が現れる数列の総数は $8(3^n - 3\cdot 2^n + 3)$ 個

以上より，

$$p_n = 8(3^n - 3\cdot 2^n + 3) + 12(2^n - 2) + 6 = 8\cdot 3^n - 12\cdot 2^n + 6 \quad \cdots(答)$$

3

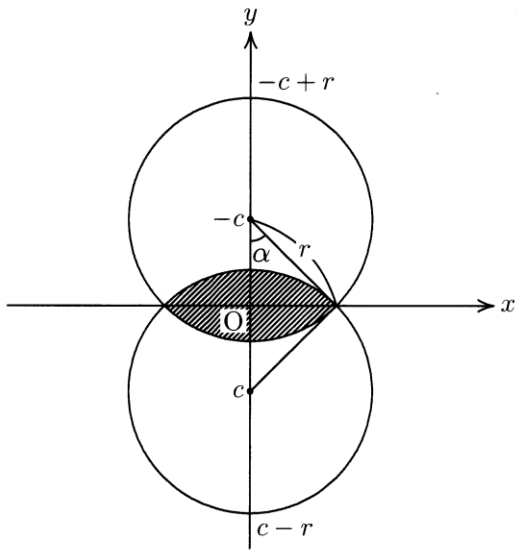
(1)　$0 \leqq c < r$ のとき，$(*)$ は次の図の斜線部分のようになる (境界を含む).



よって，

$$S = \left\{\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}\cdot(r\cos\theta)\cdot(r\sin\theta)\right\}\cdot 4 = 2r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta). \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$-r < c \leqq 0$ のとき，$(*)$ は次の図の斜線部分のようになる (境界を含む).



3 （つづき1）

よって，$\cos\alpha = -\dfrac{c}{r}$ となる α $\left(0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いると，

$$S = \left\{\frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}\cdot(r\cos\alpha)\cdot(r\sin\alpha)\right\}\cdot 4 = 2r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

ここで，$\cos\alpha = -\dfrac{c}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{c}{r}$ より，$\cos\alpha = -\cos\theta$ であり，さらに，$0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ より，$\alpha = \pi - \theta$ であるから，

$$S = 2r^2\{(\pi-\theta) - \sin(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta)\} = 2r^2(\pi - \theta + \sin\theta\cos\theta). \qquad \cdots(答)$$

(3) 平面 $z = t$ 上の領域 D_1: $x^2 + (y - f(t))^2 \leqq r^2$ における y 座標の最小値が $-s$ であるから，

$$f(t) - r = -s,\ \text{すなわち，}\ f(t) = r - s$$

であり，平面 $z = t$ 上の領域 D_2: $x^2 + (y - g(t))^2 \leqq r^2$ における y 座標の最大値が s であるから，

$$g(t) + r = s,\ \text{すなわち，}\ g(t) = s - r$$

である．

よって，$f(t) = -g(t)$ であるから，$c = f(t)$，すなわち，$c = r - s$ とおくと，D_1 と D_2 の共通部分は $(*)$ の表す領域となる．

D_1 と D_2 の共通部分が存在するための条件は，$r - r \leqq 2|c| \leqq r + r$，すなわち，$-r \leqq c \leqq r$ であり，このとき，D_1 と D_2 の共通部分の面積を T とすると，T は次の (i)，(ii) のようになる．

(i) $0 \leqq c \leqq r$ のとき，すなわち，$0 \leqq s \leqq r$ のとき．

$0 \leqq c < r$，すなわち，$0 < s \leqq r$ なら，(1) より，$\cos\theta = \dfrac{c}{r}$，すなわち，$s = r(1 - \cos\theta)$ となる θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いると，

$$T = 2r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta). \qquad \cdots①$$

また，$c = r$，すなわち，$s = 0$ なら，D_1 と D_2 の共通部分は1点のみとなるから，$c = r$，すなわち，$s = 0$ であっても ① は成り立つ．

(ii) $-r \leqq c \leqq 0$，すなわち，$r \leqq s \leqq 2r$ のとき．

$-r < c \leqq 0$，すなわち，$r \leqq s < 2r$ なら，(2) より，$\cos\alpha = -\dfrac{c}{r}$，すなわち，$s = r(1 + \cos\alpha)$ となる α $\left(0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いると，

$$T = 2r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha). \qquad \cdots②$$

また，$c = -r$，すなわち，$s = 2r$ なら，D_1 と D_2 の共通部分は1点のみとなるから，$c = -r$，すなわち，$s = 2r$ であっても ② は成り立つ．

3 （つづき 2）

さらに，点 $(0,\ s,\ t)$ は $C : z = ay^2$ 上にあるから，$t = as^2$ となるので，(i) のとき，s の範囲に対応する t の範囲と θ の範囲は次の表のようになる．

s	0	$\to$	r
t	0	$\to$	ar^2
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

また，(ii) のとき，s の範囲に対応する t の範囲と α の範囲は次の表のようになる．

s	r	$\to$	$2r$
t	ar^2	$\to$	$4ar^2$
α	$\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	0

以上より，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{ar^2} T\ dt + \int_{ar^2}^{4ar^2} T\ dt \\
&= \int_0^{r} T \cdot 2as\ ds + \int_r^{2r} T \cdot 2as\ ds \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta) \cdot 2ar(1-\cos\theta) \cdot r\sin\theta\ d\theta \\
&\qquad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \cdot 2ar(1+\cos\alpha) \cdot (-r\sin\alpha)\ d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta) \cdot 2ar(1-\cos\theta)\ r\sin\theta\ d\theta \\
&\qquad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^2(\theta - \sin\theta\cos\theta) \cdot 2ar(1+\cos\theta) \cdot r\sin\theta\ d\theta \\
&= 8ar^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \sin\theta\cos\theta)\sin\theta\ d\theta \\
&= 8ar^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta\sin\theta - \sin^2\theta\cos\theta)\ d\theta \\
&= 8ar^4 \left[-\theta\cos\theta + \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{16}{3}ar^4. \qquad \cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

3（つづき3）

(4) $a+r=1$ より，$a=1-r$ であり，このことと $a>0$，$r>0$ より，$0<r<1$.

さらに，$a=1-r$ を (3) の結果に代入すると，

$$V=\frac{16}{3}(1-r)r^4=\frac{16}{3}(-r^5+r^4).$$

よって，$\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{16}{3}(-5r^4+4r^3)=-\dfrac{16}{3}r^3(5r-4)$ となるから，$0<r<1$ における V の増減は次の表のようになる.

r	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

このことと $a=1-r$ より，V を最大とする a，r の値は，

$$a=\frac{1}{5},\ r=\frac{4}{5}.$$

$\cdots$(答)