［I］

(1)　z が円 $|z|=1$ 上を動くので，$z=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

とおける．このとき，

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$$

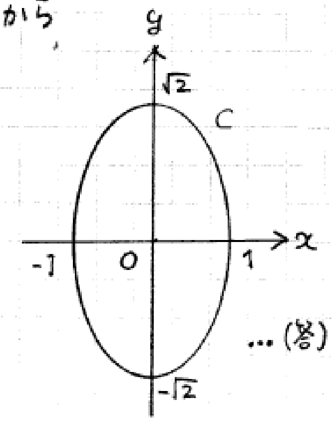
であり

$$w=\frac{1+\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1-\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\cos\theta+i\sqrt{2}\sin\theta$$

$w=x+yi$（x, y は実数）とすると，$x=\cos\theta$, $y=\sqrt{2}\sin\theta$ から，

$$x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

すなわち $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$．$0\leqq\theta<2\pi$ から w の軌跡 C は楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 全体である．



…(答)

(2)　$\left|z-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}$ において $z=x+yi$ とおくと，

$$\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+y^2=2$$

が成り立つ．$C: x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ と連立すると，

$$\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+2-2x^2=2.$$
$$\left\{\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}x\right\}\left\{\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}x\right\}=0.$$
$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)=0.$$

共有点は C 上にあり $-1\leqq x\leqq 1$．よって $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．このとき

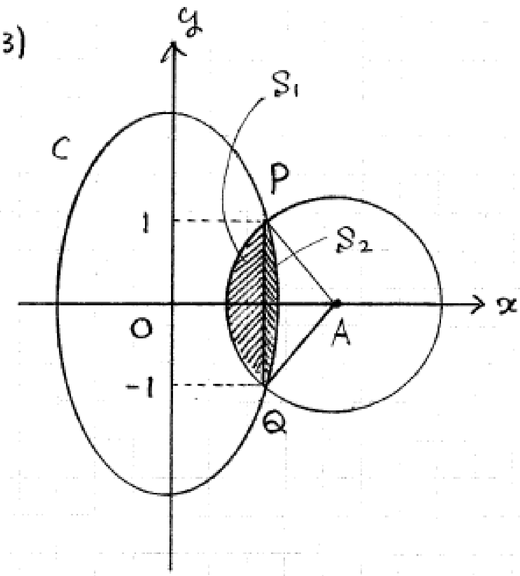
$y^2=2-2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ から $y=\pm 1$．したがって共有点は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+i,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i.$$

…(答)

[I]（つづき）

(3)



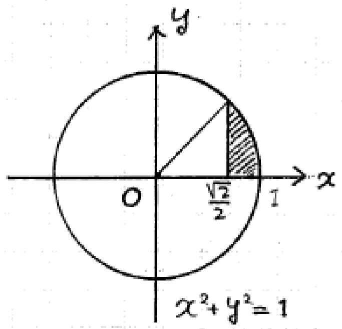
(2)の共有点をP, Q，(2)の円の中心をAとおく．$AP=AQ=\sqrt{2}$，$PQ=2$ なので $\angle PAQ=\frac{\pi}{2}$．

したがって，線分PQと円で囲まれる左図の面積 S_1 は

$$S_1=\pi(\sqrt{2})^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2$$
$$=\frac{\pi}{2}-1.$$

C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$ から $y=\pm\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$．よって，線分PQと C で囲まれる上図の部分の面積 S_2 は

$$S_2=2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=2\sqrt{2}\underbrace{\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx}_{(*)}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\pi\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

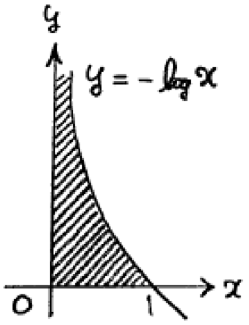


(*)は上図の斜線部分の面積に等しい．

したがって，求める面積は

$$S_1+S_2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}}{4}(\pi-2).\quad\cdots(答)$$

［Ⅱ］



$y=\log\frac{1}{x}=-\log x$ である.

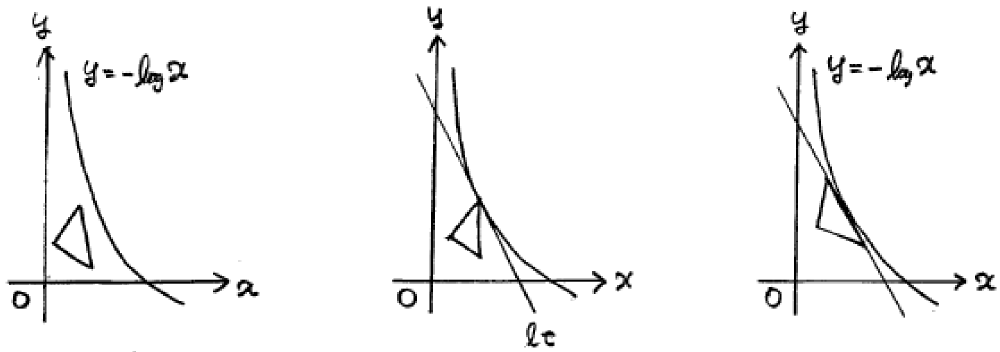
$y=-\log x$ は減少関数で下に凸である.

また, 図形 D は左図の斜線部分である.

$y=-\log x$ 上の点 $(t, -\log t)$ $(0<t\leqq 1)$

におけるこの曲線の接線を l_t, l_t と

x 軸, y 軸で囲まれる領域を D_t とする.



D に含まれる任意の三角形について, D 内で移動させる. すると

　頂点が $y=-\log x$ 上にある　…(ア)

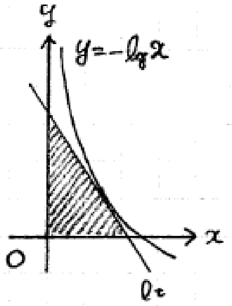
もしくは

　辺が $y=-\log x$ と接する　…(イ)

ようにできる.

(ア)の場合はその頂点で接線を, (イ)の場合はその接点で接線を引くと, D 内の任意の三角形はある l_t の下側領域, すなわち, ある D_t に含まれることがわかる.

[II]（つづき）



t を固定する。

D_t に含まれる三角形で面積が最大のものは，x 軸，y 軸，l_t で囲まれる左図の三角形であり，その面積を $S(t)$ とおく。

$y=-\log x$ より $y'=-\dfrac{1}{x}$ なので，

$$l_t:\ y=-\frac{1}{t}(x-t)-\log t$$

$x=0$ として $y=1-\log t$，$y=0$ として $x=t(1-\log t)$ から

$$S(t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2 \quad (0<t\leqq 1)$$

t を動かす。

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left\{(1-\log t)^2+t\cdot 2(1-\log t)\left(-\frac{1}{t}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(\log t-1)(\log t+1)$$

これより $S(t)$ の増減は次の通り

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

したがって，D に含まれる三角形の面積の最大値は $\dfrac{2}{e}$　…（答）

[Ⅲ]

はじめのカードの位置を $\boxed{}$ で表す.

(1) $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}$

$$2\left\langle\begin{matrix}1 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{matrix}\right.$$

$\boxed{1}$ に 2 を並べたとき, 左のように 3 通りの並べ方がある. $\boxed{1}$ に 3, 4 を並べたときも同様なので,

$a_4 = 3 \times 3 = 9$ …(答)

(2)

$\boxed{1} \cdots \boxed{i} \cdots \boxed{n}$

$i \cdots 1 \cdots$

(ア) $i = 2, 3, 4, \cdots, n$ とする.

$\boxed{1}$ に i, $\boxed{i}$ に 1 を並べるとき, 残り $n-2$ 枚の並べ方は a_{n-2} 通りある. i のとり方は $n-1$ 通りあり, $(n-1)a_{n-2}$ 通りある.

$\boxed{1} \cdots \boxed{i} \cdots \boxed{n}$

i

(イ) $i = 2, 3, 4, \cdots, n$ とする.

(ア)と重複しないよう, $\boxed{1}$ に i, $\boxed{i}$ に 1 以外を並べる場合を考える. 1 のカードを i とみなし $\boxed{2}\boxed{3} \cdots \boxed{i} \cdots \boxed{n}$ へ $2, 3, \cdots i \cdots n$ を条件を満たすよう並べると考えると a_{n-1} 通りある. i のとり方は $n-1$ 通りあり, $(n-1)a_{n-1}$ 通りある.

(ア)(イ)から, $n \geqq 3$ のとき

$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ …(答)

［Ⅲ］（つづき）

(3)　$p_n=\dfrac{a_n}{n!}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ なので，$a_n=n!\,p_n$.

(2)から，$n\geqq 3$ のとき

$$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$$

よって，

$$n!\,p_n=(n-1)\{(n-1)!\,p_{n-1}+(n-2)!\,p_{n-2}\}$$

両辺を $(n-1)!$ で割って

$$n p_n=(n-1)p_{n-1}+p_{n-2}$$

これは

$$n(p_n-p_{n-1})=-(p_{n-1}-p_{n-2})$$

とできるので，

$$p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2}) \qquad \cdots(*)$$

これを繰り返し用いて

$$\begin{aligned}
p_n-p_{n-1}&=-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2})\\
&=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)(p_{n-2}-p_{n-3})\\
&\ \ \vdots\\
&=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)(p_2-p_1)\\
&=(-1)^{n-2}\cdot\frac{2!}{n!}\times\left(\frac{1}{2}-0\right)\\
&=\frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

（これは $n=2$ のときも成りたつ）

よって，$n\geqq 2$ で　$p_n-p_{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{n!}$　$\cdots$（答）

《p_n-p_{n-1} を求める別解》

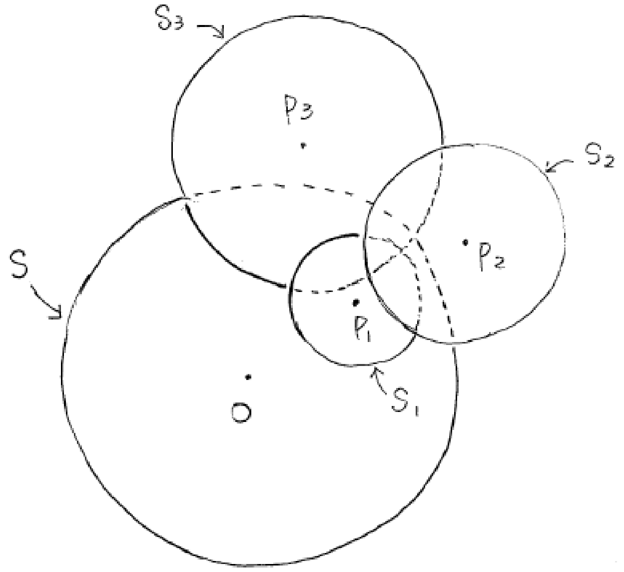
$(*)$の両辺に $(-1)^n\cdot n!$ をかけて

$$(-1)^n n!(p_n-p_{n-1})=(-1)^{n-1}(n-1)!(p_{n-1}-p_{n-2})$$

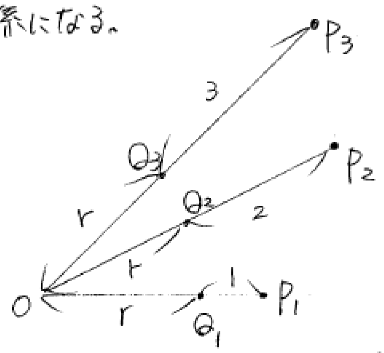
これより　$(-1)^n n!(p_n-p_{n-1})=(-1)^2\,2!(p_2-p_1)$

よって，　$p_n-p_{n-1}=\dfrac{1}{(-1)^n n!}\times(-1)^2\cdot 2!\left(\dfrac{1}{2}-0\right)=\dfrac{(-1)^n}{n!}$

［Ⅳ］



(1) 球面 S が球面 S_1, S_2, S_3 と接する点をそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3 とする。
すると，次のような位置関係になる。



図より

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{r+1}{r}\overrightarrow{OQ_1},\quad \overrightarrow{OP_2}=\frac{r+2}{r}\overrightarrow{OQ_2},\quad \overrightarrow{OP_3}=\frac{r+3}{r}\overrightarrow{OQ_3}$$

これらを与式に代入すると，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r}\overrightarrow{OQ_1}+\frac{r+2}{r}\overrightarrow{OQ_2}+\frac{r+3}{r}\overrightarrow{OQ_3}\right)$$

ここで，Q, Q_1, Q_2, Q_3 は同一平面上にあることから，

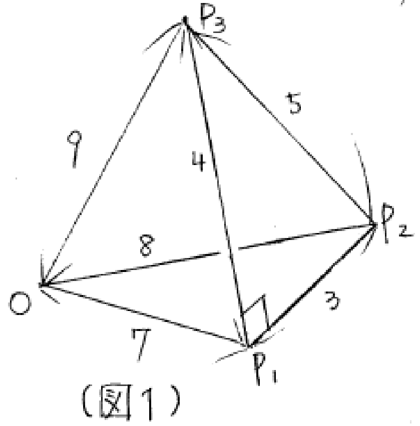
$$(\text{係数の和})=\frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r}+\frac{r+2}{r}+\frac{r+3}{r}\right)=1$$

が成立する．これを解いて

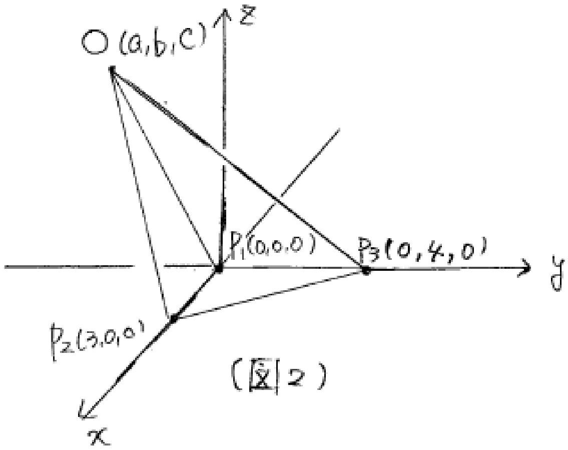
$$\underline{r=6} \qquad \cdots(\text{答})$$

[IV]（つづき）

（2）四面体 $OP_1P_2P_3$ は条件より図のようになる（図1）。



（図1）



（図2）

$\triangle P_1P_2P_3$ が $\angle P_1=90°$ の直角三角形であることから，図2のように座標設定する。

ここで，$O(a,b,c)$ $(c>0)$ とおく。

$$OP_1^2 = a^2+b^2+c^2 = 49 \quad \cdots ①$$

$$OP_2^2 = (a-3)^2+b^2+c^2 = 64 \quad \cdots ②$$

$$OP_3^2 = a^2+(b-4)^2+c^2 = 81 \quad \cdots ③$$

②−①より　$(a-3)^2 - a^2 = 15$　これを解くと，$a=-1$

③−①より　$(b-4)^2 - b^2 = 32$　これを解くと，$b=-2$

これらを①に代入して　$1+4+c^2=49$

$c>0$ より　$c=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\times\triangle P_1P_2P_3\times c$$

$$= \frac{1}{3}\times 6 \times 2\sqrt{11}$$

$$= \underline{4\sqrt{11}} \quad \cdots （答）$$

[V]

(1)　$C : y^3 - x^2 - 2 = 0$ の両辺を x で微分すると $3y^2y' - 2x = 0$ となる．C 上では $y \geqq \sqrt[3]{2} > 0$ であるから，$y' = \dfrac{2x}{3y^2}$ となる．$(x, y) = (a, b)$ を代入すると，(a, b) における接線 $\ell : y = kx + c$ の傾きが

$$k = \frac{2a}{3b^2} \qquad \cdots ①$$

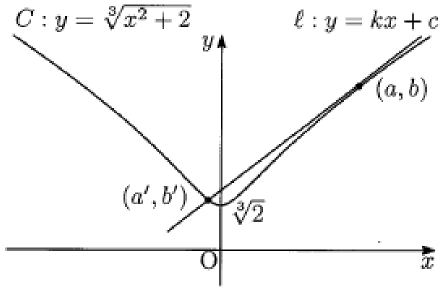
であるとわかる．$a \neq 0$ より $k \neq 0$ であるから，ℓ の式は

$$x = \frac{y - c}{k} \qquad \cdots ②$$

と表すこともできる．② を C の式に代入して，

$$y^3 - \left(\frac{y-c}{k}\right)^2 - 2 = 0 \iff y^3 - \frac{1}{k^2}y^2 + \frac{2c}{k^2}y - \frac{c^2}{k^2} - 2 = 0.$$

これが $y = b$ を重解にもち，残りの解が b' であるから，解と係数の関係より



$$2b + b' = \frac{1}{k^2}. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(2)　(a, b) は C 上の点なので $a^2 = b^3 - 2$ である．(1) の答と ① より

$$b' = \frac{1}{k^2} - 2b = \frac{9b^4}{4a^2} - 2b = \frac{9b^4}{4(b^3-2)} - 2b = \frac{b^4 + 16b}{4(b^3-2)} \qquad \cdots \text{(答)}$$

(3)　(2) の答より b が有理数ならば b' も有理数となる．① より a, b が有理数ならば k も有理数となる．(a, b) は ℓ 上の点なので $b = ka + c$ より

$$c = b - ka.$$

(a', b') は ℓ 上の点なので，② より

$$a' = \frac{b' - c}{k} = \frac{b' - b + ka}{k}$$

a, b が有理数ならば b', k は有理数なので，a' も有理数となる．　**(証明終り)**

(4)　(2) の答に $b = \dfrac{p}{2^r q}$ を代入すると，

$$b' = \frac{\left(\dfrac{p}{2^r q}\right)^4 + 16\left(\dfrac{p}{2^r q}\right)}{4\left\{\left(\dfrac{p}{2^r q}\right)^3 - 2\right\}} = \frac{p^4 + 2^{3r+4}pq^3}{4(2^r p^3 q - 2^{4r+1}q^4)} = \frac{p^4 + 2^{3r+4}pq^3}{2^{r+2}(p^3 q - 2^{3r+1}q^4)} = \frac{\text{奇数}}{2^{r+2}(\text{奇数})}.$$

となる．よって，

$$s = r + 2 \qquad \cdots \text{(答)}$$

(5)　問題の (a, b) を (a_n, b_n) として定まる (a', b') を (a_{n+1}, b_{n+1}) とする．(3) の解答の 1 行目より b_n が有理数ならば，b_{n+1} も有理数であるから $b_{n+1} \neq \sqrt[3]{2}$ となる．(a_{n+1}, b_{n+1}) は C 上の点なので，$a_{n+1} \neq 0$ となる．よって，$(a_0, b_0) = (5, 3)$ から始めて，座標が共に有理数の点列 $\{(a_n, b_n)\}$ を定めることができる．

$b_0 = 3 = \dfrac{3}{2^0 \times 1}$ と考えれば，b_n を既約分数で表した時の分母の素因数 2 の個数は (4) より 2 ずつ増えていくので，$b_0, b_1, b_2, \cdots$ は全て異なる．よって，C 上に x 座標と y 座標が共に有理数となる点は無限個ある．

(証明終り)